SELECTIVIDAD CANTABRIA. EJERCICIOS RESUELTOS DE GEOMETRÍA

1.- Se considera la ecuación siguiente: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ a \end{pmatrix}$

A) Interpreta su significado geométrico en función de a. B) ¿Para qué valores de a se puede asegurar que la ecuación tiene solución? C) Para los valores de a obtenidos, resolver la ecuación. (J-97)

SOLUCIÓN:

A) El sistema corresponde a las ecuaciones paramétricas de un plano y, según los valores del parámetro a, el punto P = (3, -3, a) pertenecerá o no a dicho plano. Si el sistema es compatible existen valores de s y t para los que dicho punto está en el plano.

B) Podemos escribir el sistema en la forma: $s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ a-1 \end{pmatrix}$, de donde la condición para que el sistema sea compatible y puedan eliminarse los parámetros t y s será: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & a-1 \end{vmatrix} = 0$, $5a - 30 = 0$, $a = 6$

C) Como la matriz de coeficientes es de rango 2, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5$, el sistema queda reducido a las ecuaciones: $\begin{cases} s + 2t = 0 \\ -s + 3t = -5 \end{cases}$, que tiene como soluciones: s = 2 y t = -1.

2.- Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - 3y + 6 = 0 \\ ax - 3z + 3 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x - 2ay + 4a - 1 = 0 \\ 2y - z - 4 = 0 \end{cases}$

a) Averiguar si existe algún valor de a para el cual las rectas estén contenidas en un plano. En caso afirmativo, calcula la ecuación de ese plano.
b) Determinar los valores de a para los que las rectas son paralelas y los valores de a para los que las rectas se cruzan. (S-99)

SOLUCIÓN:

a) Calculamos un vector director de r: $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 0 \\ a & 0 & -3 \end{vmatrix} = 9i + 3j + 3ak$. Por lo tanto podemos tomar como vector director de r: $v = 3i + j + ak$

Un vector director de s vendrá dado por: $w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2a & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2ai + j + 2k$

Si tomamos un punto P de r y otro Q de s y el vector $\overrightarrow{PQ}$ no depende linealmente de v y w, entonces la rectas se cruzan en el espacio. En otro caso las rectas serán coplanarias. Tomamos: P= (0, 2, 1) y Q = (1-4*a*, 0, -4). Tendremos $\overrightarrow{PQ}=\left(1-4a,-2,-5\right)$. La condición para que los tres vectores sean linealmente independientes viene dada por: $\begin{vmatrix} 1-4a & -2 & -5 \\ 3 & 1 & a \\ 2a & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, de donde: $a-1\neq 0$, $a\neq 1$. En este caso las rectas se cruzan en el espacio.

Si $a=1$, como los vectores $v=3i+j+k$ y $w=2i+j+2k$ no son paralelos, las rectas r y s ni son paralelas ni coincidentes, luego se cortan en un punto y están contenidas en el mismo plano. Un vector normal a dicho plano será: $n=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=i-4j+k$. El plano pertenecerá al haz de planos paralelos: $x-4y+z+D=0$. Imponiéndole la condición de que contenga el punto P= (0, 2, 1) de r, se obtiene D = 7. Luego la ecuación del plano buscada será: $x-4y+z+7=0$.

b) Según lo indicado en el punto anterior, las rectas r y s no pueden ser paralelas y se cruzan para $a\neq 1$.

3ª.- Se consideran las rectas: $r\equiv\begin{cases} x-2y=1 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases} x+2y+z=7 \\ y+2z=5 \end{cases}$. Se pide:

a) Probar que r y s están en un mismo plano Π.
b) Determinar la posición de la recta t≡ $x=y+1=-z-2$ respecto del plano Π y respecto de la recta s.
c) Ecuación de la recta paralela a r que se corta con s y con t.

SOLUCIÓN:

a) Escribimos las ecuaciones paramétricas de r y s: $r\equiv\begin{cases} x & = & 1+2t \\ y & = & t \\ z & = & 2t \end{cases}$

$s\equiv\begin{cases} x & = & -3+3s \\ y & = & 5-2s \\ z & = & s \end{cases}$, de donde tendremos: vector director de r: $\overrightarrow{v_r}=\left(2,1,2\right)$ y un punto de r: $M=\left(1,0,0\right)$. Análogamente, vector director de s: $\overrightarrow{v_s}=\left(3,-2,1\right)$ y $N=\left(-3,5,0\right)$.

Con estos datos tomamos el vector: $\overrightarrow{MN}=\left(-4,5,0\right)$ y formamos el determinante:

$\begin{vmatrix} -4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -4 & 5 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0$. Lo que implica que las rectas r y s no se cruzan en el espacio. Como no pueden ser paralelas ni coincidentes son secantes y coplanarias.

b) Hallamos la ecuación del plano Π, determinado por el punto M y con vectores directores $\vec{v_r}=(2,1,2)$ y $\vec{v_s}=(3,-2,1)$.

$$\pi\equiv\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ y & 1 & -2 \\ z & 2 & 1 \end{vmatrix}=0;\ \pi\equiv 5x+4y-7z-5=0$$

Para hallar las posiciones relativas del plano con la recta t, consideramos el sistema:

$\begin{cases} 5x+4y-7z-5 &= 0 \\ x-y-1 &= 0 \\ x+z+2 &= 0 \end{cases}$. Hallamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$\begin{vmatrix} 5 & 4 & -7 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-16$, lo que significa que el sistema es compatible determinado y, en consecuencia, la recta es secante al plano en un punto.

c) Hallamos el punto de corte de la recta t y el plano Π.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 4 & -7 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-16}=-\frac{5}{16};\ y=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-16}=-\frac{21}{16};\ z=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{-16}=-\frac{27}{16}$$

Calculamos, a continuación, la ecuación de una recta que pasa por este punto y tiene como vector director el de la recta r: $q\equiv\begin{cases} x &= \frac{-5}{16}+2p \\ y &= \frac{-21}{16}+p \\ z &= \frac{-27}{16}+2p \end{cases}$, que podemos pasar a implícitas: $q\equiv\begin{cases} x-2y=1 \\ 8x-8z=11 \end{cases}$

4.- Se considera el plano *Π* ≡- *x+2y+z+1=0*, la recta $r\equiv\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{2}=z-3$ y el punto A(1,0,2). a) Obtener la ecuación del plano Π_1 que pasa por A, es paralelo a la recta r y es perpendicular al plano Π. b) Determinar, si es posible, un plano perpendicular a Π que pase por A y no sea paralelo a r.

SOLUCIÓN

a) Hallamos las ecuaciones implícitas de r: $\begin{cases} x-3z &= -7 \\ 2x-3z &= 1 \end{cases}$ y la ecuación del haz de planos de arista r: $(\lambda+2)x-3y-3\lambda z=1-7\lambda$

La ecuación de los planos paralelos a estos viene dada entonces:

$(\lambda+2)x-3y-3\lambda z=1-7\lambda+m$

Imponemos, primero la condición de que el plano sea perpendicular a π: Como el vector normal a π es $\vec{n}=(-1,2,1)$ y el vector normal al plano buscado viene dado por:

$\overrightarrow{n_1} = (2+\lambda, -3, -3\lambda)$, han de ser ortogonales con los cual: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{n_1} = 0 = -(2+\lambda) - 6 - 3\lambda$, de donde: $\lambda = -2$.

Es decir, la ecuación del plano buscado será de la forma: $-3y + 6z = 15 + m$. Si ahora le imponemos la condición de que pase por A=(1,0,2), se obtiene m = -3, con lo que la ecuación del plano será: $-3y + 6z = 12$, o simplificando: $-y + 2z = 4$

b) Sea $Ax + By + Cz + D = 0$, la ecuación del plano buscado, por ser perpendicular a π, se cumple: $-A + 2B + C = 0$.

Como pasa por A=(1,0,2), tendremos: $A + 2C + D = 0$.

Si el plano no es paralelo a r, un vector normal al mismo no podrá ser ortogonal a un vector director de r como, por ejemplo, $\vec{v} = (3,2,1)$, es decir: $3A + 2B + C \neq 0$

De las dos primeras ecuaciones obtenemos, tomando como parámetros C y D:

$A = -2C - D$, $B = \dfrac{-3C - D}{2}$. Si sustituimos estos valores en la desigualdad, obtenemos: $D \neq -3C$.

Por lo tanto, si hacemos C = t y D = s, los planos que cumplen la condición serán:

$-(2t+s)x - \dfrac{3t+s}{2}y + tz + s = 0$, con la condición $s \neq 3t$.