1.- Sean a,b,c tres números distintos de 0 y M la matriz dada por $M = \begin{pmatrix} a & b & o \\ 0 & b & c \\ a & 0 & c \end{pmatrix}$.

a) Demostrar que tiene inversa y calcularla.

b) Resolver el sistema expresando las soluciones en función de a,b,c. $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

c) Estudiar si existen valores de a,b y c para que el punto $\left(\frac{1}{2},1,0\right)$ sea solución del sistema.

SOLUCIÓN:

$|M| = \begin{vmatrix} a & b & o \\ 0 & b & c \\ a & 0 & c \end{vmatrix} = 2abc$, si *a, b* y *c* no son nulos el determinante será distinto de 0 y M regular.

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2a} & -\frac{1}{2a} & \frac{1}{2a} \\ \frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} & -\frac{1}{2b} \\ -\frac{1}{2c} & \frac{1}{2c} & \frac{1}{2c} \end{pmatrix}$$

b) Como: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2a} & -\frac{1}{2a} & \frac{1}{2a} \\ \frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} & -\frac{1}{2b} \\ -\frac{1}{2c} & \frac{1}{2c} & \frac{1}{2c} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c-b}{2a}+\frac{1}{2} \\ \frac{a}{2b}-\frac{c}{2b}+\frac{1}{2} \\ -\frac{a}{2c}+\frac{b}{2c}+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

c) Si (1, 1, 1) es solución del sistema, tendremos: $\begin{cases} \frac{c-b}{2a}+\frac{1}{2}=1 \\ \frac{a}{2b}-\frac{c}{2b}+\frac{1}{2}=1 \\ -\frac{a}{2c}+\frac{b}{2c}+\frac{1}{2}=1 \end{cases}$ equivalente al sistema homogéneo $\begin{cases} -a-b+c=0 \\ a-b-c=0 \\ -a+b-c=0 \end{cases}$. Como el determinante de la matriz de los coeficientes: $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$, el sistema únicamente tiene la solución trivial *a=0*, *b=0* y *c=0* lo que contradice la hipótesis de partida que *a,b,c* son tres números distintos de 0.

2.- Si las matrices $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ tienen rangos 1 y 2 respectivamente, explicar qué valores pueden tener los rangos de las matrices

$$C=\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & z & w \end{pmatrix} \; ; D=\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ x & y & 0 & 0 \\ z & w & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad E=\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ x & 0 & y & 0 \\ z & 0 & w & 0 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN:

C no puede ser de rango 4 ya que:

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & z & w \end{vmatrix} = ad\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix} - cb\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix} = (ad-cb)\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix} = 0 \text{ , ya que } |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-cb=0,$$

por ser r(A) = 1 uno, al menos de sus elementos ha de ser no nulo, sea d.

Es de rango 3 ya que $\begin{vmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & w \end{vmatrix} = d\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}$ es no nulo siempre que $d \neq 0$.

D es de rango 2.

E es de rango 3 si b o $d \neq 0$, ya que podemos tomar el menor $\begin{vmatrix} c & d & 0 \\ x & 0 & y \\ z & 0 & w \end{vmatrix} = -d\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}$

Si ambos son nulos, entonces su rango será 2.

3.- a) Determinar el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} 2a & b & 1 \\ 2 & ab & 1 \\ 2 & b & a \end{pmatrix}$ según los valores de los parámetros *a* y *b*.

b) Calcular A^{-1}, en función de *a* y *b*.

SOLUCIÓN:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2a & b & 1 \\ 2 & ab & 1 \\ 2 & b & a \end{vmatrix} = 2b\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 2b\begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ a+2 & a & 1 \\ a+2 & 1 & a \end{vmatrix} = 2b(a+2)(a-1)^2$

Si $a \in R - \{-2,1\}$ y $b \neq 0$, $|A| \neq 0$ y *r(A) =3.*

Si $b = 0$, $A=\begin{pmatrix} 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix}$ que es de rango 2 si $a \neq 1$ y de rango 1 si $a = 1$.

Si $a = -2$, $A=\begin{pmatrix} -4 & b & 1 \\ 2 & -2b & 1 \\ 2 & b & -2 \end{pmatrix}$, como podemos extraer $\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6$, su rango es 2.

Si $a = 1$, $A=\begin{pmatrix} 2 & b & 1 \\ 2 & b & 1 \\ 2 & b & 1 \end{pmatrix}$, que es rango 1.

b) A^{-1} viene dada por:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{a+1}{2\cdot(a-1)\cdot(a+2)} & \dfrac{1}{2\cdot(1-a)\cdot(a+2)} & \dfrac{1}{2\cdot(1-a)\cdot(a+2)} \\ \dfrac{1}{b\cdot(1-a)\cdot(a+2)} & \dfrac{a+1}{b\cdot(a-1)\cdot(a+2)} & \dfrac{1}{b\cdot(1-a)\cdot(a+2)} \\ \dfrac{1}{(1-a)\cdot(a+2)} & \dfrac{1}{(1-a)\cdot(a+2)} & \dfrac{a+1}{(a-1)\cdot(a+2)} \end{bmatrix}$$

4.- Resolver la ecuación matricial $B(2A+I) = AXA+B$, siendo I la matriz unidad,

$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN:

$2A-I=\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -8 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $B(2A+I)=\begin{pmatrix} 23 & -7 & 6 \\ -11 & 4 & -1 \\ 12 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

$AXA = B(2A+I)-B$, de donde: $X = A^{-1}\left(B(2A+I)-B\right)A^{-1}$

$B(2A+I)-B=\begin{pmatrix} 22 & -6 & 4 \\ -10 & 4 & 0 \\ 12 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; como $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$, tendremos:

$$X = A^{-1}\left(B(2A+I)-B\right)A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & -8 & -6 \\ -6 & -18 & 12 \\ 4 & 14 & -10 \end{pmatrix}$$

5.- a) Comprobar que la matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ cumple que A^3=-A - I y calcular la matriz inversa de A.

b) Si A es cualquier matriz n x n tal que A^3= - A - I y se sabe que det A= m, calcular el valor del determinante de A + I en función de m.

SOLUCIÓN:

a) $A^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $-A-I=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, con lo que está probada la igualdad.

$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $A+I=-A^3$, de donde: $|A+I|=|-A^3|=(-1)^n|A^3|=(-1)^n|A|^3=(-1)^n m^3$

6.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ b & a & 1 & -1 \\ a & -1 & a & 0 \\ -2 & -b & a & 0 \end{pmatrix}$, hallar a y b para que A^t=-A. (A^t representa la matriz traspuesta de A)

Para los valores obtenidos, calcular detA, det A^t y det (3A).

SOLUCIÓN:

De $\begin{pmatrix} 0 & b & a & -2 \\ 1 & a & -1 & -b \\ 0 & 1 & a & a \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ b & a & 1 & -1 \\ a & -1 & a & 0 \\ -2 & -b & a & 0 \end{pmatrix}$, obtenemos *a = 0* y *b = -1*

$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=4$. Como por las propiedades de los determinantes, sabemos que $|A|=|A^t|=4$, $|3A|=3^4|A|=324$

7.- Utilizar las propiedades de los determinantes para resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & 3 & 3 & 3 \\ x & 3 & 2x & 2x \\ x & 3 & 2x & 5 \end{vmatrix} = 0$$

SOLUCIÓN:

$$\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & 3 & 3 & 3 \\ x & 3 & 2x & 2x \\ x & 3 & 2x & 5 \end{vmatrix} = x(x-3)(2x-3)(2x-5) = 0$$; de donde:

x = 0; x = 3; $x = \dfrac{3}{2}$ y $x = \dfrac{5}{2}$

8.- a) Resolver la ecuación $\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ x & 2 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = 0$

b) Expresar en función de x el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & x & x & .... & x \\ x & 2 & x & .... & x \\ x & x & 3 & .... & x \\ .. & .. & .. & .... & .. \\ x & x & x & .... & x \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN:

a) $\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ x & 2 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = x(1-x)(x-2)(x-3) = 0$; de donde: *x = 0*; *x = 1*; *x = 2* y *x = 3*.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x & x & .... & x \\ x & 2 & x & .... & x \\ x & x & 3 & .... & x \\ .. & .. & .. & .... & .. \\ x & x & x & .... & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x & .... & x \\ x-1 & 2-x & 0 & .... & 0 \\ x-1 & 0 & 3-x & .... & 0 \\ .. & .. & .. & .... & .. \\ x-1 & 0 & 0 & .... & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= x \begin{vmatrix} x-1 & 2-x & ... & 0 \\ x-1 & 0 & ... & 0 \\ ... & .. & ... & ... \\ x-1 & 0 & ... & n-1-x \end{vmatrix} = x(x-1) \begin{vmatrix} 1 & 2-x & ... & 0 \\ 1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & 0 & ... & n-1-x \end{vmatrix} =$$

$$= x(x-1)(x-2) \begin{vmatrix} 1 & 3-x & ... & 0 \\ 1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & 0 & ... & n-1-x \end{vmatrix} = x(x-1)(x-2)(x-3)...(x-n+1)$$