Ejemplos resueltos de ejercicios de Análisis propuestos en las P.A.U. de Cantabria

1.- Se considera la función** $f : R \to R$ **definida por:** $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax + b$**.

a) Calcula los valores de las constantes a y b para que f tenga como recta tangente en su punto de inflexión a la recta y = 1.
b) Para esos valores de a y b dibuja la gráfica de la función, analizando previamente los intervalos de crecimiento, los puntos de corte con los ejes. La existencia de asíntotas y la curvatura. ***(S – 06)***

SOLUCIÓN:
a) Para calcular la abscisa del punto de inflexión:
$f'(x) = 3x^2 + 6x + a$; $f''(x) = 6x + 6$
Haciendo la derivada segunda igual a 0, obtenemos: x = -1
Como: $f'''(-1) = 6$, concluimos que *f* tiene un P.I. en x = -1.

La ecuación de la tangente a *f* en ese punto vendrá dada por: $y - f(-1) = f'(-1)(x+1)$.

Como la pendiente de y = 1 es 0, tendremos que $f'(-1) = 0$, luego: $3 - 6 + a = 0$, de donde: $a = 3$ y la ecuación de la tangente quedará: $y = f(-1) = 1$.

De donde: $-1 + 3 - 3 + b = 1$; $b = 2$.
Luego: $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

b) **Monotonía**: $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = 3(x+1)^2$; se anula para x = -1.
Elaboramos la siguiente tabla para estudiar el signo de la derivada primera:

		-1
$(x+1)^2$	+ +	0 + +
$f'(x)$	+ +	0 + +
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$

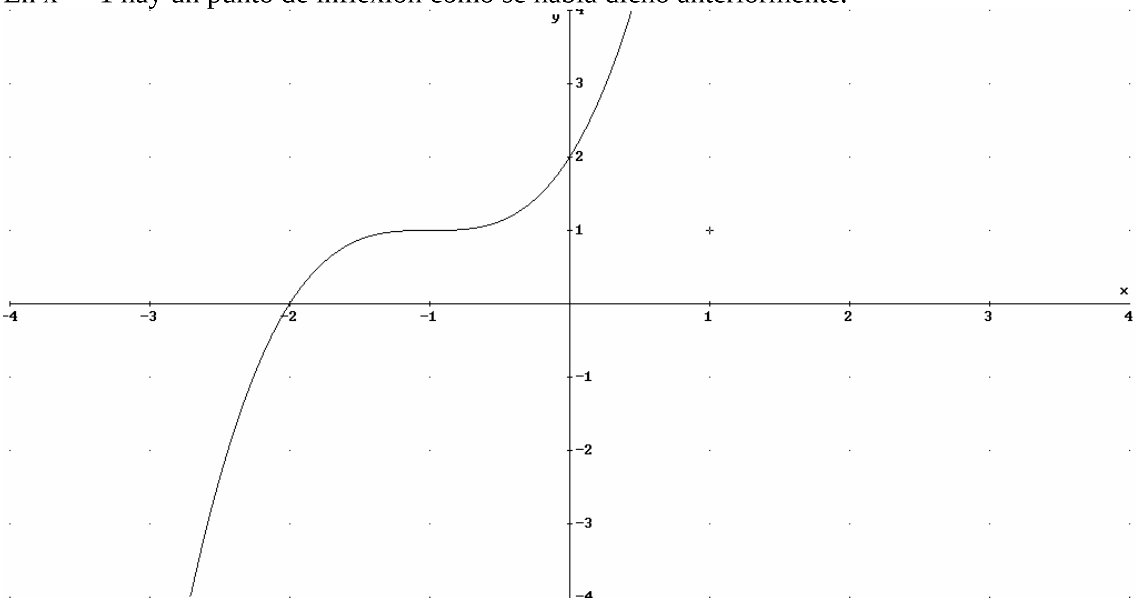
Con ello, se concluye que f es creciente en todo su dominio R.
Cortes con los ejes:
OX: factorizamos $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x^2 + x + 1)$ cuya única raíz real es:
x = -2, luego corta al eje OX en (-2, 0).
OY: (0, 2).

Asíntotas:
Como: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$; no tiene asíntotas horizontales.
Tampoco tiene asíntotas verticales.
Como: $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$; no tiene asíntotas oblicuas.

Curvatura:
Se estudia el signo de $f''(x) = 6x + 6 = 6(x+1)$

		-1
$(x+1)$	+ +	0 + +
$f''(x)$	- -	0 + +
$f(x)$	Cóncava $\cap$	Convexa $\cup$

En x = -1 hay un punto de inflexión como se había dicho anteriormente.



2.- El precio de un diamante es proporcional al cuadrado de su peso. Justifíquese que cualquier partición de un diamante hace disminuir su valor. Encuéntrese la partición menos deseable de un diamante en dos partes. (J – 85)

SOLUCIÓN:

Sea h el peso del diamante entero. Su valor será $V = kh^2$ (siendo k la constante de proporcionalidad). Si el diamante se parte en dos trozos de pesos *x* e *y* respectivamente, el valor del diamante vendrá dado por $V(x,y) = kx^2 + ky^2$. Teniendo en cuenta que: $x + y = h$, podemos expresar dicha ecuación: $V(x) = kx^2 + k(h-x)^2 = kh^2 - 2kx(h-x)$.

Es decir: $V(x) = V - 2kx(h-x)$ (siendo *V* el valor del diamante entero). Como $2kx \geq 0$ y $h \geq x$, tendremos que $V(x) \leq V$ y serán iguales cuando *x = h*, es decir, cuando el diamante esté entero.

La derivada de la función es: $V'(x) = 2k(2x-h)$ y se anula para $x = \frac{h}{2}$, como $V''(x) = 4k > 0$, tendremos un valor mínimo cuando $x = \frac{h}{2}$, es decir cuando se divida en dos del mismo peso.

3.- Obtener una función f(x) que verifique: f ´(x) = (x-1).e^x y f(x) tiene un extremo en el eje OX. Determinar si ese extremo es máximo o mínimo ***(J-98)***

SOLUCIÓN

$$f(x) = \int (x-1)e^x dx = (x-2)e^x + c$$

Como tiene un extremo en OX, y teniendo en cuenta que $f\,'(x) = (x-1)e^x$, se anula únicamente para *x = 1*, se cumplirá: $f(1) = (1-2)e^1 + c = 0$; de donde: $c = e$ y tenemos: $f(x) = (x-2)e^x + e$.

Como: $f\,''(x) = xe^x$ y $f\,''(1) = e > 0$, en x = 1 la función alcanza un mínimo.

4.- A) Calcula la expresión analítica de la función f que cumple las siguientes condiciones:
i) Es un polinomio de grado 3.
ii) Corta al eje OX en tres puntos que tienen por abscisas, respectivamente, x=2, x=4, x=6.
iii) Su valor en x=0 es f(0) = - 48
B) Haz un esquema gráfico de la función f obtenida en el apartado anterior.
C) Calcula el área del recinto limitado por: La gráfica de f, el eje OX, la recta de ecuación x= 2 y la recta de ecuación x= 4. ***(J-03)***

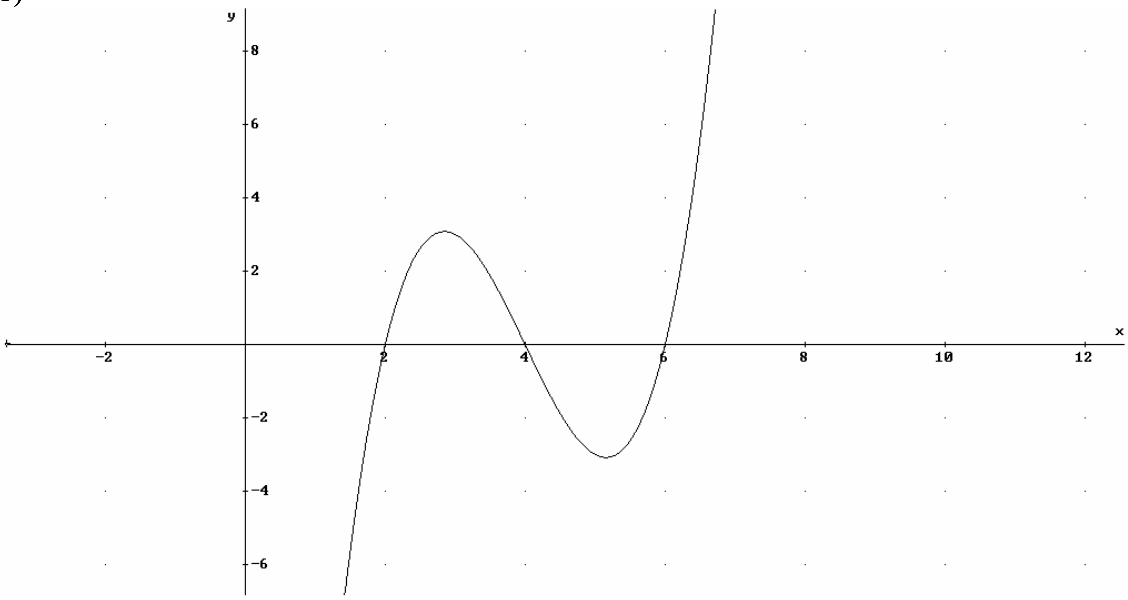
SOLUCIÓN

a) De las dos primeras condiciones, se deduce que: $f(x) = a(x-2)(x-4)(x-6)$, siendo *a* un número real no nulo.

De la tercera condición impuesta a f, se sigue: $f(0) = a(0-2)(0-4)(0-6) = -48$; de donde: $-48a = -48$; $a = 1$. Por lo tanto:

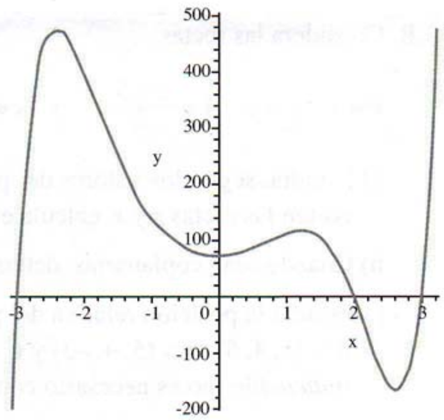
$f(x) = (x-2)(x-4)(x-6) = x^3 - 12x^2 + 44x - 48$

b)



c) Como en el intervalo [2, 4] la función f está definida positiva, el área del recinto pedida, vendrá dada por: $\int_2^4 \left(x^3 - 12x^2 + 44x - 48\right)dx = \left[\dfrac{x^4}{4} - 4x^3 + 22x^2 - 48x\right]_2^4 = 4$

5.- El dibujo adjunto corresponde a la gráfica de una función f.
a) Haz la representación gráfica de la función – f en [-3, 3].
b) Con los datos que tienes y sabiendo que f es derivable dos veces en todo R, haz un dibujo que pueda corresponder a la función derivada f' en [-3, 3]. Explica cómo construyes ese dibujo.
c) Si f es estrictamente creciente en $(-\infty,-3)$ ***y en*** $(3,+\infty)$***, ¿cuántos extremos máximos y mínimos tiene f? y ¿cuántos tiene – f? Para responder a cada pregunta elige una y sólo una de las tres opciones siguientes y justifica tu elección:***
1) Tiene al menos cuatro puntos extremos.
2) Tiene exactamente cuatro puntos extremos.
3) Tiene exactamente seis puntos extremos. (S -06)



SOLUCIÓN:
a) La gráfica de –f es simétrica de la gráfica de f respecto al eje OX y pasa por los puntos (aproximadamente):
(-3, 0); (-2,5, -480); (0, -70); (1,5, -120); (2,5, 180) ; (3, 0).
b) A partir de la gráfica de la función *f* , obtenemos la siguiente información sobre *f '*:

	-3	-2,5	0	1,5	2,5	3
f	Creciente	Decrecte.	Creciente	Decrecte.	Creciente	
f'(x)	+	0 -	0 +	0 -	0 +	
	-3	-1,5	0,5	2		3
f	cóncava	convexa	cóncava	convexa		
f''(x)	-	+	-	+		
f'	Decreciente	Creciente	Decreciente	creciente		

Con esos datos podemos hacer un esbozo de la gráfica de *f '*.
c) La función *f*:
Si *f* es estrictamente creciente en $(-\infty,-3)$ y en $(3,+\infty)$ no puede tener ningún extremo en dichos intervalos, todos sus posibles extremos estarán en el intervalo [-3, 3] y se hallan en los puntos de abscisas: x = -2,5; x = 0; x = 1,5 y x = 2,5, luego tiene exactamente cuatro puntos extremos (dos máximos y dos mínimos relativos).

La función –*f* : Por ser la gráfica de esta función simétrica de la de *f* respecto al eje OX, tendrá el mismo número de extremos que esta, la diferencia es que los máximos de *f* son los mínimos de –*f* y los mínimos de *f* los máximos de –*f*. Por lo tanto tiene exactamente cuatro puntos extremos.