MATEMÁTICAS II
I.E.S. "La Marina". Recuperación de Geometría.

Alumno(a):

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe exponerse con claridad el planteamiento del problema o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
2. Los resultados sin justificar, aunque sean correctos, no puntúan.
3. Aunque los problemas pueden resolverse en el orden que se quiera, los diferentes apartados de un mismo problema deben resolverse y presentarse en el orden indicado en cada enunciado.

1º.- (4 puntos) Dada la recta $r \equiv \begin{cases} 4x - y - z - 2 & = 0 \\ 2x + 4y - 2z + 2 & = 0 \end{cases}$. Se pide:

a) Estudiar la posición relativa de la recta *r* y la recta *s* que pasa por A = (1, 1, 0) y B = (2, 0, 1).
b) Hallar la distancia entre ambas.
c) Hallar el ángulo que forman.
d) Determinar los planos π_1 y π_2 tales que ambos contienen a la recta r y el primero al punto A y el segundo al punto B. ¿Cuáles son sus posiciones relativas?

Solución:

a) Conocidos un vector director de cada recta, $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$, y un vector $\overrightarrow{PQ}$, siendo P un punto de r y Q un punto de s, tendremos:

a) Si los tres vectores son linealmente independientes las rectas se cruzan en el espacio.
b) Si las coordenadas de $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son proporcionales, las rectas son paralelas o coincidentes.
c) Si $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes y $\overrightarrow{PQ}$ depende linealmente de ellos, las rectas son secantes.

Para ver en cuál de las tres situaciones nos encontramos, pasamos r a paramétricas:

$r \equiv \begin{cases} x & = & 1+t \\ y & = & t \\ z & = & 2+3t \end{cases}$, y obtenemos $\overrightarrow{v_r} = (1,1,3)$ y $P = (1,0,2)$

Por otra parte, podemos tomar como vector director de s: $\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{AB} = (1,-1,1)$ y el punto $Q = A = (1,1,0)$. Con ello, $\overrightarrow{PQ} = (0,1,-2)$.

Analizamos el rango de la matriz cuyas filas están formadas por las coordenadas de los tres vectores: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6$, los tres vectores son linealmente independientes y estamos en el caso a), las rectas se cruzan en el espacio.

b) Para hallar la distancia entre dos rectas que se cruzan, podemos recurrir a la fórmula $d(r,s) = \dfrac{\left[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{PQ}\right]}{\left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}\right|}$, que nos da la altura del paralelepípedo cuyas aristas son los tres vectores considerados mediante el cociente entre su volumen y el área de la base. Dicha altura coincide con la distancia entre ambas rectas.

Como $\left[\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{PQ}\right]=\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=6$, y $\overrightarrow{v_r}\times\overrightarrow{v_s}=4\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$, tendremos:

$$d(r,s)=\frac{6}{\sqrt{4^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{6}{\sqrt{24}}=\frac{\sqrt{6}}{2}u\ .$$

c) El ángulo formado por las dos rectas es igual al menor de los ángulos determinados por sus vectores directores. De acuerdo con la definición de producto escalar:

$\cos(r,s)=\left|\cos\left(\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_s}\right|}$. En consecuencia: $\cos(r,s)=\frac{|1-1+3|}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{33}}=\frac{\sqrt{33}}{11}$.

El ángulo de las dos rectas será: $(r,s)=\arccos\frac{\sqrt{33}}{11}\simeq 58^{\text{o}}\,31'$.

d) Para el plano π_1 que contiene a r pasa por el punto A, podemos tomar como vectores directores $\overrightarrow{v_r}=(1,1,3)$, $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PQ}=(0,1,-2)$ y el punto $Q=A=(1,1,0)$. En consecuencia, su ecuación viene dada por $\pi_1\equiv\begin{vmatrix}x-1 & 1 & 0\\ y-1 & 1 & -1\\ z & 3 & 2\end{vmatrix}=0$. Desarrollando y simplificando, se obtiene: $\pi_1\equiv 5x-2y-z-3=0$.

Para el plano π_2 que contiene a r pasa por el punto B, podemos tomar como vectores directores $\overrightarrow{v_r}=(1,1,3)$, $\overrightarrow{PB}=(1,0,-1)$ y el punto $B=(2,0,1)$ con lo que tendremos:

$\pi_2\equiv\begin{vmatrix}x-2 & 1 & 1\\ y & 1 & 0\\ z-1 & 3 & -1\end{vmatrix}=0$, de donde se obtiene: $\pi_2\equiv x-4y+z-3=0$.

Teniendo en cuenta que las coordenadas de los vectores normales de ambos planos no son proporcionales, no son coincidentes. Como paralelos no pueden ser, son secantes según la recta r.

2º.- (3 puntos) Dada la recta $r\equiv\begin{cases}x=3\\ y+z+1=0\end{cases}$, el plano $\pi\equiv x-y+z-1=0$ y el punto M = (1, 1, -1). Se pide:

a) Hallar las posiciones relativas de r y π.

b) Si un triángulo rectángulo tiene el vértice recto A en r y la hipotenusa tiene por extremos B = (2, 1, -1) y C = (0, -1, 3), calcular su área.

c) Hallar la ecuación de una recta que pasa por M , es paralela a π y corta al eje OZ.

Solución

a) Consideremos el sistema constituido por las ecuaciones implícitas de la recta y la ecuación general del plano. La matriz de los coeficientes es $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$. Como

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, su rango es 3 y coincidirá con el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas, el sistema será compatible determinado, según el teorema de Rouché-Fröbenius, lo que implica que la recta corta al plano en un punto P. Las coordenadas del punto serán la solución del sistema que es $P = \left(3, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

b) Pasando la ecuación de r a paramétricas, $r \equiv \begin{cases} x = 3 \\ y = -1-t \\ z = t \end{cases}$. El punto A indicado en el enunciado tendrá como coordenadas $A = (3, -1-t, t)$. Al ser el vértice del ángulo recto del triángulo, cuyos otros vértices son B y C, se cumple que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son ortogonales, con lo que su producto escalar es nulo: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Las coordenadas de $\overrightarrow{AB} = (-1, 2+t. -1-t)$ y las de $\overrightarrow{AC} = (-3, t, 3-t)$, luego:
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 + 2t + t^2 - 3 + t^2 - 3t + t = 2t^2 = 0$, de donde $t = 0$ y $A = (3, -1, 0)$

El área de un triángulo rectángulo es igual al semiproducto de la longitud de sus catetos, por lo tanto: $\acute{A}rea = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{3}\ u^2$.

c) Al ser la recta s paralela al plano π, su vector director $\vec{v_s}$ será ortogonal al vector normal del plano $\vec{n} = (1, -1, 1)$. Sea P el punto de de s con el eje OZ, sus coordenadas serán de la forma $P = (0, 0, c)$. Si tomamos $\vec{v_s} = \overrightarrow{PM} = (1, 1, -1-c)$, tendremos: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PM} = 0$, de donde: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PM} = 1 - 1 - 1 - c = 0$ y obtenemos que $c = -1$. En consecuencia, la recta pedida viene determinada por $\vec{v_s} = (1, 1, 0)$ y $\mathrm{M} = (1, 1, -1)$.

Sus ecuaciones paramétricas serán: $s \equiv \begin{cases} x = 1+s \\ y = 1+s \\ z = -1 \end{cases}$ y de ellas podemos obtener sus ecuaciones implícitas $s \equiv \begin{cases} x - y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$.

3º.- Se considera el plano $\Pi \equiv -x+2y+z+1=0$, la recta $r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} = z - 3$ y el punto A(1,0,2). Se pide:

a) (2 puntos) Obtener la ecuación del plano Π_1 que pasa por A, es paralelo a la recta r y es perpendicular al plano Π.

b) (1 punto) Determinar las coordenadas del punto A', simétrico de A respecto a la recta r.

Solución:

a) Método 1º:

Hallamos las ecuaciones implícitas de r: $\begin{cases} x-3z &= -7 \\ 2x-3y &= 1 \end{cases}$ y la ecuación del haz de planos de arista r: $(\lambda+2)x-3y-3\lambda z=1-7\lambda$

La ecuación de los planos paralelos a estos viene dada entonces:
$(\lambda+2)x-3y-3\lambda z=1-7\lambda+m$

Imponemos, primero la condición de que el plano sea perpendicular a π: Como el vector normal a π es $\vec{n}=(-1,2,1)$ y el vector normal al plano buscado viene dado por: $\overrightarrow{n_1}=(2+\lambda,-3,-3\lambda)$, han de ser ortogonales con los cual: $\vec{n}\cdot\overrightarrow{n_1}=0=-(2+\lambda)-6-3\lambda$, de donde: $\lambda=-2$.

Es decir, la ecuación del plano buscado será de la forma: $-3y+6z=15+m$. Si ahora le imponemos la condición de que pase por A=(1,0,2), se obtiene m = -3, con lo que la ecuación del plano será: $-3y+6z=12$, o simplificando: $y-2z+4=0$

Método 2º: Sea $\overrightarrow{v_r}=(3,2,1)$ un vector director de la recta r y $\vec{n}=(-1,2,1)$ un vector normal del plano π. Podemos tomar ambos vectores como directores del plano π_1 buscado. Como además pasa por el punto $A=(1,0,2)$, tendremos:

$\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 3 & -1 \\ y & 2 & 2 \\ z-2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$, de donde: $\pi_1 \equiv 4y-8z+16=0$, y simplificando:
$\pi_1 \equiv y-2z+4=0$.

b) El simétrico A' de A respecto a la recta r determina con A un segmento AA' del que r es la mediatriz. El punto medio M de este segmento pertenece a r, y para calcular sus coordenadas basta hallar el punto de corte de r con el plano perpendicular a esta recta que pasa por A.

Podemos tomar el vector director de r, $\overrightarrow{v_r}=(3,2,1)$, como el vector normal de dicho plano, con lo que su ecuación será de la forma: $3x+2y+z+D=0$. Para calcular D le imponemos la condición de que pase por $A=(1,0,2)$, $3+2+D=0$, de donde obtenemos: $D=-5$. La ecuación del plano será $3x+2y+z-5=0$.

Pasando r a paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x &= 2+3t \\ y &= 1+2t \\ z &= 3+t \end{cases}$, sustituyendo en la ecuación del plano $3(2+3t)+2(1+2t)+3+t-5=0$, de donde se obtiene $t=-\dfrac{3}{7}$. Con lo que las coordenadas de M serán: $M=\left(\dfrac{5}{7},\dfrac{1}{7},\dfrac{18}{7}\right)$.

Si hacemos $A'=(a,b,c)$, tendremos: $\frac{a+1}{2}=\frac{5}{7}$; $\frac{b}{2}=\frac{1}{7}$ y $\frac{c+2}{2}=\frac{18}{7}$, de donde se obtiene: $A'=(a,b,c)=\left(\frac{3}{7},\frac{2}{7},\frac{22}{7}\right)$.