MATEMÁTICAS II **I.E.S. "La Marina". Examen de Recuperación de Álgebra**
Alumno(a):
INDICACIONES AL ALUMNO 1.- Debe exponerse con claridad el planteamiento del problema o el método utilizado para su resolución. 2.- Todas las respuestas deben ser razonadas. 3.- Resultados o respuestas aisladas no puntúan aunque sean correctas.

1.- (3 puntos) Sean *a,b,c* tres números distintos de 0 y M la matriz dada por

$$M=\begin{pmatrix} a & b & o \\ 0 & b & c \\ a & 0 & c \end{pmatrix}.$$

a) Demostrar que tiene inversa y calcularla.

b) Resolver el sistema expresando las soluciones en función de *a,b,c*. $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

c) Estudiar si existen valores de *a,b* y *c* para que el punto $\left(\frac{1}{2},1,0\right)$ sea solución del sistema.

SOLUCIÓN

a) La matriz M tendrá inversa si es regular, es decir, si su determinante es distinto de cero.

Como $|M|=\begin{vmatrix} a & b & o \\ 0 & b & c \\ a & 0 & c \end{vmatrix}=2abc$ y dado que de acuerdo con el enunciado: *a,b,c* son tres números distintos de 0, tendremos que $|M|=2abc\neq 0$.

$$M^{-1}=\frac{(adjM)^t}{|M|}=\frac{(adjM)^t}{2abc}.$$

Calculamos $(adjM)^t$ que resulta ser $(adjM)^t=\begin{pmatrix} bc & -bc & bc \\ ac & ac & -ac \\ -ab & ab & ab \end{pmatrix}$, de donde:

$$M^{-1}=\frac{(adjM)^t}{2abc}=\frac{1}{2abc}\begin{pmatrix} bc & -bc & bc \\ ac & ac & -ac \\ -ab & ab & ab \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2a} & -\frac{1}{2a} & \frac{1}{2a} \\ \frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} & -\frac{1}{2b} \\ -\frac{1}{2c} & \frac{1}{2c} & \frac{1}{2c} \end{pmatrix}$$

b)Dado que M es una matriz regular y tiene inversa, el sistema $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ se puede resolver multiplicando por la izquierda por la matriz M^{-1}:

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, de donde: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2a} & -\frac{1}{2a} & \frac{1}{2a} \\ \frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} & -\frac{1}{2b} \\ -\frac{1}{2c} & \frac{1}{2c} & \frac{1}{2c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Efectuado los cálculos, se obtiene: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{b-c}{2a} \\ \frac{1}{2} + \frac{a-c}{2b} \\ \frac{1}{2} + \frac{b-a}{2c} \end{pmatrix}$.

c) Para que el punto $\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$ sea una solución del sistema, habrán de existir valores de a, b y c no nulos que satisfagan $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{b-c}{2a} \\ \frac{1}{2} + \frac{a-c}{2b} \\ \frac{1}{2} + \frac{b-a}{2c} \end{pmatrix}$, de donde se obtiene el sistema homogéneo: $\begin{cases} b-c = 0 \\ a-b-c = 0 \\ -a+b+c = 0 \end{cases}$. Si el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de 0, la única solución será la trivial y, por lo tanto, no existirán dichos valores. En caso contrario, la terna será una solución del sistema. Dicho determinante es nulo ya que, como puede observarse la 2ª y 3ª filas son proporcionales: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. En consecuencia, $\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$ es una solución del sistema.

2.- (2 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2a & b & 1 \\ 2 & ab & 1 \\ 2 & b & a \end{pmatrix}$, se pide:

a) Hallar, aplicando las propiedades de los determinantes, el determinante de la matriz *A*.
b) Discutir el rango de *A* en función de los valores de los parámetros *a* y *b*.

SOLUCIÓN

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2a & b & 1 \\ 2 & ab & 1 \\ 2 & b & a \end{vmatrix} = 2b \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$, sacando factor común a 2 y b que multiplican a la 1ª y 2ª columna respectivamente.

$|A| = 2b \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ a+2 & a & 1 \\ a+2 & 1 & a \end{vmatrix}$, sumando a la 1ª columna la 2ª y la 3ª.

$|A| = 2b(a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$, sacando factor común a (a+2).

$|A| = 2b(a+2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \\ 1 & 0 & a-1 \end{vmatrix}$, sumando a la 2ª y 3ª columna la opuesta de la 1ª.

Como queda el determinante de una matriz triangular, obtendremos:

$|A| = 2b(a+2)(a-1)^2$

b) A partir del resultado obtenido en el apartado a) tendremos:

1) Si $b \neq 0$ y $a \notin \{-2, 1\}$, $|A| \neq 0$ y rango de A es 3.

2) Si a = 1, tendremos $A = \begin{pmatrix} 2 & b & 1 \\ 2 & b & 1 \\ 2 & b & 1 \end{pmatrix}$, con lo que al tener las tres filas iguales y no ser nulos todos sus elementos el rango de A es 1 con independencia de los valores que pueda tomar b.

3) Si a = -2, tendremos $A = \begin{pmatrix} -4 & b & 1 \\ 2 & -2b & 1 \\ 2 & b & -2 \end{pmatrix}$. Podemos elegir el menor $\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6$ que nos indica que, independientemente de los valores que tome b, el rango de A será 2.

3.- (3 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones $S \equiv \begin{cases} 3x - 2y + z & = 5 \\ 2x - 3y + z & = 4 \end{cases}$

a) Resolver el sistema S.

b) Añadir al sistema S una ecuación de la forma $x + y = a$ y discutir el sistema obtenido según los valores de a.

c) Añadir al sistema S una ecuación de forma que se obtenga un sistema compatible determinado con solución (2, -1, -3).

SOLUCIÓN

a) Tomando y=t como parámetro y empleando el método de Gauss, tendremos:

$\begin{cases} 3x+z & =5+2y \\ 2x+z & =4+3y \end{cases}$; tomando y = t, $\begin{cases} 3x+z & =5+2t \\ 2x+z & =4+3t \end{cases}$, de donde la matriz asociada al sistema podremos escribirla como: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5+2t \\ 2 & 1 & 4+3t \end{pmatrix}$, sumando a la 1ª fila (-1)2ª fila, se obtiene: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-t \\ 2 & 1 & 4+3t \end{pmatrix}$, sumando a 2ª fila (-2)1ª fila: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-t \\ 0 & 1 & 2+5t \end{pmatrix}$, de donde obtenemos: la solución del sistema: $S=\{(1-t,t,2+5t),\, t\in\mathbb{R}\}$.

b) El nuevo sistema podemos escribirlo como $S'\equiv\begin{cases} x+y & = & a \\ 2x-3y+z & = & 4 \\ 3x-2y+z & = & 5 \end{cases}$. La matriz de los coeficientes será $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0$, ya que como puede observarse 3ª fila – 2ª fila = 1ª fila. Teniendo en cuenta que podemos elegir el menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=1$, concluimos que le rango de A es igual a 2.

Para calcular el rango de la matriz ampliada, tomamos el menor de orden 3:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -3 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}=1-a$.

A partir de estos resultados, razonaremos de la siguiente forma:

1) Si a = 1, los rangos de las matrices ampliada y de los coeficientes son iguales a 2, como el número de incógnitas es 3, el sistema será compatible indeterminado y dependerá de un parámetro.

2) Si a es distinto de 1, el rango de la matriz ampliada es 3, distinto del de la matriz de los coeficientes y, de acuerdo con el teorema de R-F el sistema será incompatible.

c) En primer lugar hemos de comprobar que (2, -1, -3) es solución de las dos ecuaciones que figuran en el sistema S.

En efecto, $S\equiv\begin{cases} 3\cdot 2-2(-1)+(-3) & =5 \\ 2\cdot 2-3(-1)+(-3) & =4 \end{cases}$. La ecuación que hemos de añadir será de la forma $ax+by+cz=d$ y ha de tener entre sus soluciones a la terna (2, -1, -3). En consecuencia, ha de cumplir que $a\cdot 2+b(-1)+c(-3)=d$, es decir, $2a-b-3c=d$.

Por otra parte para que el sistema que resulta al añadirle esta nueva ecuación sea compatible determinado, el determinante de la matriz de los coeficientes debe ser no nulo. Es decir:

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -a+b+5c \neq 0 .$$

La terna $(a,b,c)=(0,1,1)$ es una de las infinitas que satisfacen la desigualdad.
Sustituyendo estos valores en $2a-b-3c=d$, obtenemos $-4=d$. Con lo que la ecuación que puede añadirse para formar un sistema compatible determinado con la solución indicada puede ser: $y+z=-4$.

4.- (2 puntos) Resolver la ecuación matricial $B(2A+I)=AXA+B$, siendo *I* la matriz unidad, $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN:
Despejando AXA de $B(2A+I)=AXA+B$, obtenemos $AXA=B(2A+I)-B$. Aplicando las propiedades del producto de matrices, tendremos que $AXA=B(2A)+B-B$, de donde: $AXA=2(BA)$.

Como $|A|=\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, la matriz *A* es regular y tiene inversa que vale: $A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & -8 & 6 \\ -6 & -18 & 12 \\ 4 & 14 & -10 \end{pmatrix}$.

Multiplicando ambos miembros a la derecha por A^{-1}, tendremos: $(AXA)A^{-1}=2(BA)A^{-1}$, de donde aplicando las propiedades del producto de matrices, obtenemos: $AX=2B$.
Multiplicando ahora a la izquierda por A^{-1} y aplicando las propiedades del producto llegamos a $X=2(A^{-1}B)$

$$X=2(A^{-1}B)=2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -8 & 6 \\ -6 & -18 & 12 \\ 4 & 14 & -10 \end{pmatrix}$$