Examen de Matemáticas aplicadas a las CCSS.
I.E.S. Santa Cruz de Bezana. Febrero 2004

Alumno(a):

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES AL ALUMNO

El examen consta de tres Bloques. Cada bloque tiene dos opciones a y b. El alumno ha de resolver los tres bloques, permitiéndosele elegir en cada bloque una de las dos opciones. Cada bloque que resuelva lo identificará según los ejemplos: si resuelve del bloque 3 la opción b, la parte correspondiente a este ejercicio estará encabezada por la siguiente expresión: bloque 3-b; si resuelve del bloque 1 la opción a, la parte correspondiente a este ejercicio estará encabezada por la siguiente expresión: bloque 1-a. El orden de resolución de los bloques es a elección del alumno. Los dos primeros bloques se valoran hasta 3.5 y el tercero hasta 3.

BLOQUE 1 (3,5 puntos)

Opción 1-a

Sea la función: $f(x)=\frac{(x+2)^2}{x+3}$ Se pide:

a) Su dominio de definición.
b) Asíntotas de la función.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
d) Recta tangente en x = - 2.
e) Hacer un dibujo aproximado de su gráfica.

SOLUCIÓN:
a) Dominio: R – {-3}
b) Asíntotas verticales: x = -3.

$$\lim_{x\to -3^-}\frac{(x+2)^2}{x+3}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -3^+}\frac{(x+2)^2}{x+3}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

Como: $\frac{(x+2)^2}{x+3}=\frac{x^2+4x+4}{x+3}=x+1+\frac{1}{x+1}$, tendremos una asíntota oblicua de ecuación: $y=x+1$

c) Hallamos la derivada primera: $f'(x)=\frac{x^2+6x+8}{(x+3)^2}$ que se anula cuando: $x^2+6x+8=0$, por lo tanto para x = -4 y x = -2. En consecuencia, podemos escribir: $f'(x)=\frac{(x+2)(x+4)}{(x+3)^2}$ y estudiamos su signo mediante una tabla como la siguiente:

	-4		-2	
x+4	- -	- -	- -	+ +
x+2	- -	+ +	+ +	+ +
f'(x)	+	-	-	+
f(x)	Creciente	Decrec.	Decrec	creciente

d) $f'(-2)=\frac{(-2+2)(-2+4)}{(-2+3)^2}=0$ ya que se trata de un extreme de la función. Como f(-2) = 0, la ecuación de la tangente es y = 0, es decir, es el eje de abscisas.

e) Puede completarse el estudio para representar la función:
En x = -4 la función alcanza un máximo relativo y en x = -2 un mínimo relativo. Podemos comprobarlo hallando la derivada segundo y sustituyendo estos valores en ella.

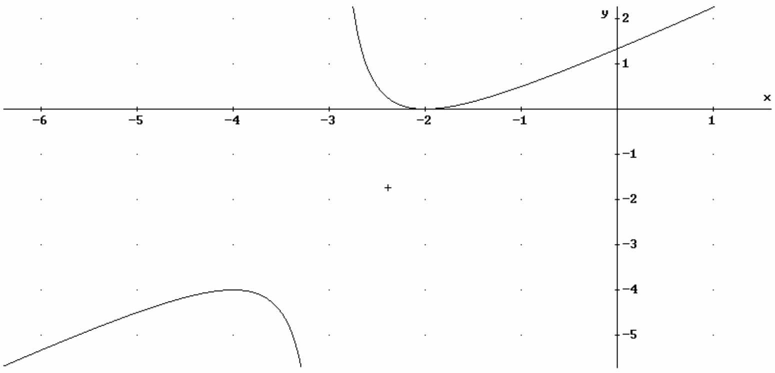
$$f''(x) = \frac{2}{(x+3)^3}.$$

$$f''(-4) = \frac{2}{(-4+3)^3} = -2 \quad \text{(máximo)}$$

$$f''(-2) = \frac{2}{(-2+3)^3} = 2 \quad \text{(mínimo)}$$

	-3	
x-3	- -	+ +
f''(x)	- -	+ +
f(x)	Cóncava	convexa

La gráfica será:



Opción 1-b

Sea la expresión $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

1. Hallar el dominio de definición de x para que f(x) sea una función.
2. Determinar las asíntotas de la función, si es que las hay.
3. Dar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
4. Hacer un dibujo aproximado de la gráfica.

SOLUCIÓN:

1. Dom f = R – {-1}
2. A.V.: x = -1, siendo el comportamiento de la función:

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

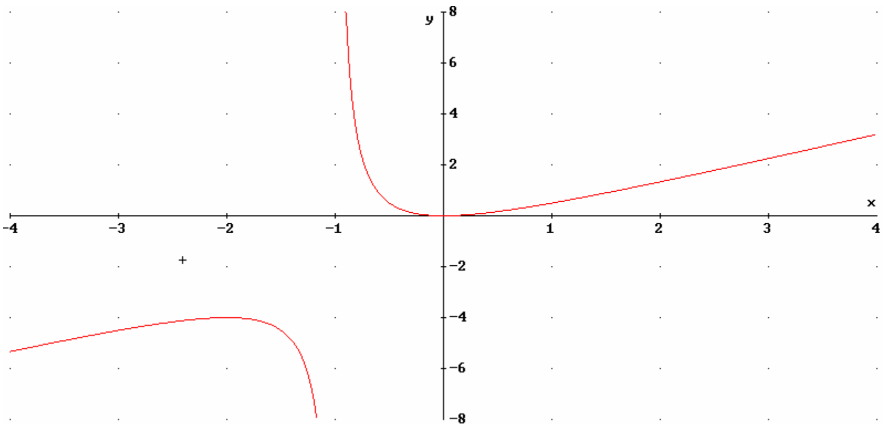
$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

AO: Como $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}=x-1+\dfrac{1}{x+1}$ tenemos una asíntota oblicua de ecuación: $y = x - 1$.
No hay asíntotas horizontales.

3. $f'(x)=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$. Para estudiar su signo elaboramos la tabla:

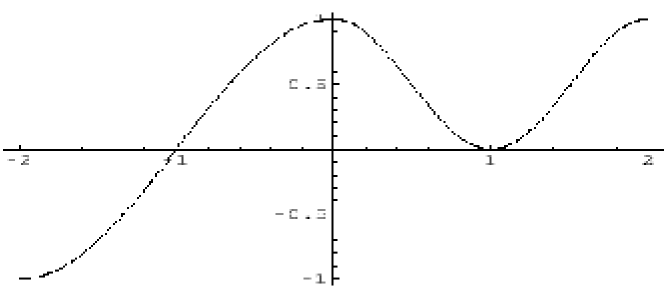
		-2		0
x	- -	-	-	+
x+2	- -	+	+	+
f'(x)	+	-	-	+
f(x)	Creciente	Decrec.	Decrec	Creciente

4. Podemos completar hallando el máximo relativo que se alcanza para $x = -2$ y toma el valor $f(-2) = -4$ y el mínimo relativo en $x = 0$ que vale $f(0) = 0$.



BLOQUE 2. (3,5 puntos)

Opción 2-a



.- Una función f(x) tiene por dominio el intervalo (-2; 2). El gráfico adjunto corresponde a la representación de la FUNCIÓN DERIVADA DE f, es decir, es el gráfico de y = f '(x) NO el de y = f(x).

Se pide:

a) Utilizando este gráfico determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de la función y = f(x), o bien explica por qué no pueden obtenerse estos resultados de los datos proporcionados por el gráfico.

b) ¿Podrían determinarse a partir de ese gráfico los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de y = f(x)?. Razona la respuesta.

c) Indica para qué valores de x la tangente a la curva y = f(x) es paralela al eje de abscisas y si hay algún valor de x para el que la tangente es paralela a la recta de ecuación $y = x - 10$. Justifica la respuesta.

SOLUCIÓN:

a) Consideremos la siguiente tabla:

	-1		0	1	
f’(x)	-	+	+	+	+
f(x)	D	C	C	C	C
f’(x)	C	C	M	D	C
f ‘’(x)	+	+	0	-	+
f(x)	Convexa	Convexa	PI	Cóncava	convexa

Hay un mínimo en x = -1 ya que se anula la derivada primera para ese valor de x y es creciente si x > -1 y decreciente si x < -1.

b) Si consideramos la tabla anterior vemos que a partir de la gráfica pude determinarse cuando la función f’(x) es creciente y cuando es decreciente con ello el signo de f’’(x) de donde podemos determinar los intervalos de concavidad y convexidad de f. En x = 0 hay un punto de inflexión y lo mismo sucede en x = 1.

c) En ese caso la pendiente es 0 lo que sucede para x = -1 y para x = 1. La tangente es paralela a $y = x - 10$ si la pendiente es 1 lo que sucede para x = 0.

Opción 2-b

Se define la función $|f(x)|$ del modo siguiente:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & si \quad f(x) > 0 \\ 0 & si \quad f(x) = 0 \\ -f(x) & si \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

Si tenemos la función $y = \#\, x^2$ - 4#, definida en el intervalo [-5, 5], se pide:

1.- Su dominio de definición.
2.- Los puntos, o el punto, en que la función se anula.
3.- Los intervalos en que la función es creciente o decreciente, así como aquellos puntos en los que alcanza un máximo o un mínimo.
4.- Los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión, si existen.

SOLUCIÓN:
Si se considera la tabla:

	-2		2	
x-2	- -	-	-	+
x+2	- -	+	+	+
x^2 - 4	+	-	-	+

Tendremos:

$$|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & si \quad x \le -2 \\ 4 - x^2 & si \quad -2 < x < 2 \\ x^2 - 4 & si \quad x \ge 2 \end{cases}$$

1. Dom= R.
2. Se anula para x = -2 y para x = 2

3. La derivada de la función es: $y' = \begin{cases} 2x & si & x < -2 \\ -2x & si & -2 < x < 2 \\ 2x & si & x > 2 \end{cases}$

En consecuencia:
es decreciente en: (-∞, -2) y (0, 2)
es creciente en: (-2, 0) y (2, +∞)
Para x = 0, tenemos que y' = 0 como es creciente en (-2, 0) y decreciente en (0, 2) en ese punto alcanza un máximo.
En x = -2 y en x = 2 la función alcanza valores mínimos.

4. Como $y'' = \begin{cases} 2 & si & x < -2 \\ -2 & si & -2 < x < 2 \\ 2 & si & x > 2 \end{cases}$ tendremos que es convexa en (-∞, -2) y en (2, +∞) y será cóncava en (-2, 2). No tiene puntos de inflexión.

BLOQUE 3 (3 Puntos)

Opción 3 -a

Hallar las dimensiones que hacen mínimo el coste de un contenedor que tiene forma de paralelepípedo rectangular, sabiendo que: su volumen es de 16 m^3, su altura 2 m y el coste de construcción por m^2 es de 5000 pesetas para la base, 6000 para cada pared lateral y 7000 para la tapa.

SOLUCIÓN:

Si x e y son las dimensiones de la base: 2xy = 16, de donde: $y = \frac{8}{x}$.
Designando por p(x) al coste total del contenedor en miles de pesetas:
$p(x) = 5x\frac{8}{x} + 6(4x + 4\frac{8}{x}) + 7x\frac{8}{x} = \frac{192}{x} + 24x + 96$
Derivando: $p'(x) = -\frac{192}{x^2} + 24$ que se anula para $x = -2\sqrt{2}$ y $x = 2\sqrt{2}$.
La derivada segunda: $p''(x) = \frac{384}{x^3}$ toma valores positivos en $x = 2\sqrt{2}$ con lo que para este valor de x y para $y = 2\sqrt{2}$ tendremos el mínimo coste.

Opción 3 -b

Disponemos de 600000 euros para vallar una parcela rectangular. La situación de la parcela es tal que está situada entre dos carreteras paralelas y por los otros lados limita con sendos propietarios particulares. Las condiciones de la urbanización nos obligan de tal modo que la construcción de las vallas que limitan con las carreteras cuesta, por metro lineal, cinco veces más que las que limitan con los otros propietarios.
El coste por metro lineal de las vallas que limitan con los otros propietarios es 60 euros.
- Determinar las dimensiones de la parcela que tenga área máxima y que podamos vallar con el dinero que disponemos.

SOLUCIÓN:

El coste por metro lineal de las vallas que limitan con las carreteras será: $5 \cdot 60 = 300$ €.
S designamos por x a la medida del lado que limita con la carretera y por y a la medida del lado que limita con los propietarios, tendremos:
$600\,000 = 2x \cdot 300 + 2y \cdot 60$; de donde: $y = 5(1000 - x)$
El área de la parcela será por lo tanto: $A(x) = 5000\,x - 5x^2$
Derivando: $A'(x) = 5000 - 10x$ que se anula para $x = 500$
Como $A''(x) = -10$, en $x = 500$ el área es máxima.
Las dimensiones de la parcela de área máxima serán $x = 500$ m e $y = 2500$ m.