Examen de Matemáticas aplicadas a las CCSS.
I.E.S. Santa Cruz de Bezana. Abril 2004. Recuperación del Bloque 2: Análisis

Alumno(a):

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES AL ALUMNO
El examen consta de tres Bloques. Cada bloque tiene dos opciones a y b. El alumno ha de resolver los tres bloques, permitiéndosele elegir en cada bloque una de las dos opciones. Cada bloque que resuelva lo identificará según los ejemplos: si resuelve del bloque 3 la opción b, la parte correspondiente a este ejercicio estará encabezada por la siguiente expresión: bloque 3-b; si resuelve del bloque 1 la opción a, la parte correspondiente a este ejercicio estará encabezada por la siguiente expresión: bloque 1-a. El orden de resolución de los bloques es a elección del alumno. Los dos primeros bloques se valoran hasta 3.5 y el tercero hasta 3.

BLOQUE 1 (3,5 puntos)

Opción 1-a

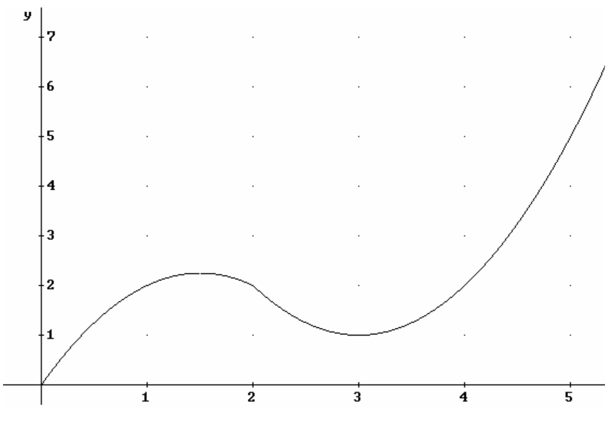
Dada la función $f(x)=\begin{cases} -x^2+kx & si \quad 0\le x\le 2 \\ x^2-6x+10 & si \quad x>2 \end{cases}$

1) Calcular el valor de k para que la función sea continua en x = 2.
2) Representar gráficamente f para el valor de k hallado en el apartado anterior.
3) Calcular la función *f ’(x)* e indicar cuál es su dominio.
4) Calcular el área del recinto limitado por el eje OX, la gráfica de f y la recta x = 4.

SOLUCIÓN

1) Para que sea continua en x = 2
$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2)$
$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-6x+10\right)=2$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(-x^2+kx\right)=-4+2k=f(2)$
Luego: $-4+2k=2$; de donde: $k=3$

2) La gráfica de la función f está formada por dos trozos de parábolas que se cortan en (2, 2) y tienen sus vértices en (3/2, 9/4) la primera y en (3, 1) la segunda.



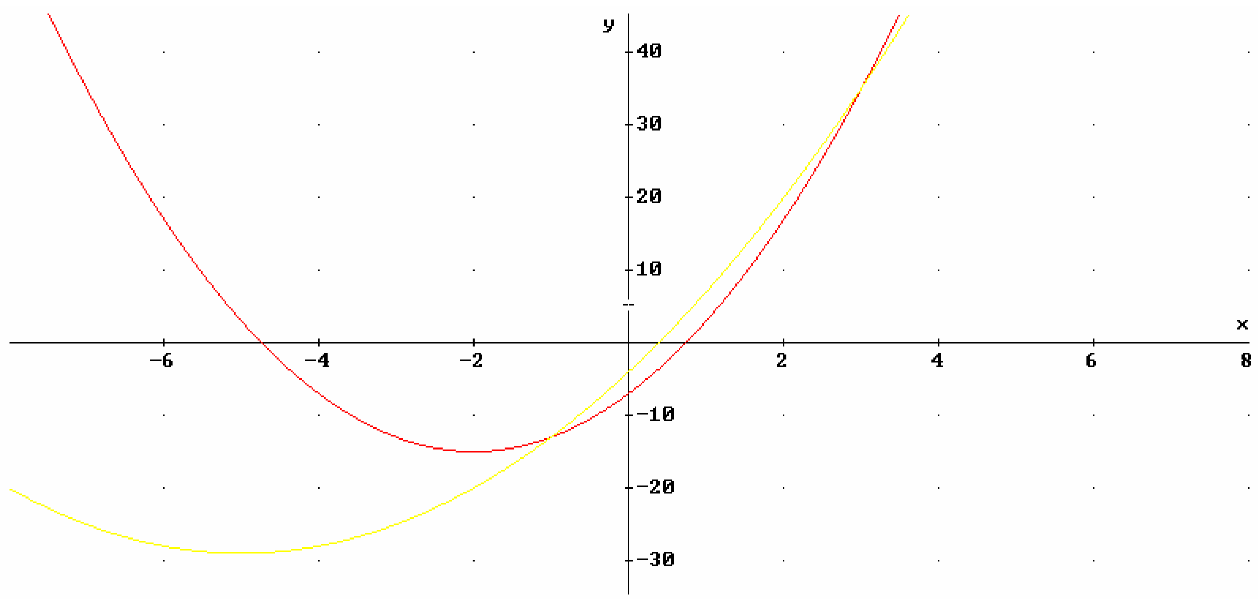
3) Si *x < 2*, *f ’(x) = -2x +3*. Si *x > 2*, *f ’(x) = 2x – 6*
Para que sea derivable en x = 2 tiene que darse la igualdad: *f ’(2 -) = f ’(2+)*
f ’(2 -) = -4 +3= -1; *f ’(2+-) = 4 -6= -2*. Por lo tanto no es derivable en x = 2.

4) $A=\int_0^2(-x^2+3x)dx+\int_2^4(x^2-6x+10)dx=$
$\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_0^2+\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+10x\right]_2^4=6$ unidades cuadradas.

Opción 1-b

Dada la función $f(x) = 2x^2 + ax + b$, se pide:
1) Determina los valores de a y b sabiendo que su gráfica pasa por el punto (1, 3) y alcanza un extremo en el punto de abscisa $x = -2$.
2) Para los valores de a y b hallados en el apartado anterior, determina la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 2$.
3) Representa gráficamente la función y calcula el área de la región del plano comprendida entre la gráfica de f y la de la función $g(x) = x^2 +10x -4$

SOLUCIÓN
1) Imponemos las condiciones del enunciado a la función $f(x) = 2x^2 + ax + b$
- Pasa por (1, 3): $f(1) = 3$; $3 = 2 + a + b$; de donde: $a + b = 1$
- Tiene un extremo en $x = -2$: $f'(-2) = 0$; $-8 + a = 0$, de donde: $a = 8$, por lo tanto:
$b = 1 - 8 = -7$
2) La ecuación de la recta tangente en x = 2 vendrá dada por:
$y - f(2) = f'(2)(x - 2)$, como $f'(x) = 4x + 8$, $f'(2) = 16$, de donde la ecuación buscada será: $y - 17 = 16(x - 2)$
3) La gráfica de la función es una parábola que corta a los ejes en
(0, -7) y en (0,74, 0) y (-4,74, 0) siendo su vértice (-2, -15)



Como puede verse al trazar las gráficas de ambas funciones, se cortan en dos puntos cuyas abscisas serán las soluciones de:
$2x^2 + 8x - 7 = x^2 + 10x - 4$ o bien: $x^2 - 2x - 3 = 0$ de donde obtenemos que se cortan en $x = -1$ y en $x = 3$.
Como puede observarse en la gráfica para todo x de [-1, 3] $g(x) \geq f(x)$, luego:

$$A = \int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-1}^{3} = \frac{32}{3}$$

BLOQUE 2. (3,5 puntos)

Opción 2-a

Dada la curva $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$, se pide:
1. Dominio y asíntotas.
2. Simetrías y cortes con los ejes.
3. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
4. Máximos y mínimos, si los hay.

5. Una representación aproximada de la misma.
6. El área encerrada por la curva, las rectas x = -1,5 ; x = 1,5 y el eje de abscisas.

SOLUCIÓN

1) Dominio: D = R – {-2, 2}

A.V.: $\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x^2-4} = \frac{\frac{1}{2}}{0^+} = +\infty$; $\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x^2-4} = \frac{\frac{1}{2}}{0^-} = -\infty$, luego *x = 2*

$\lim_{x\to -2^+} \frac{x}{x^2-4} = \frac{-\frac{1}{2}}{0^-} = +\infty$; $\lim_{x\to -2^-} \frac{x}{x^2-4} = \frac{-\frac{1}{2}}{0^+} = -\infty$; luego *x = -2*

A.H.: $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$; luego: *y = 0*

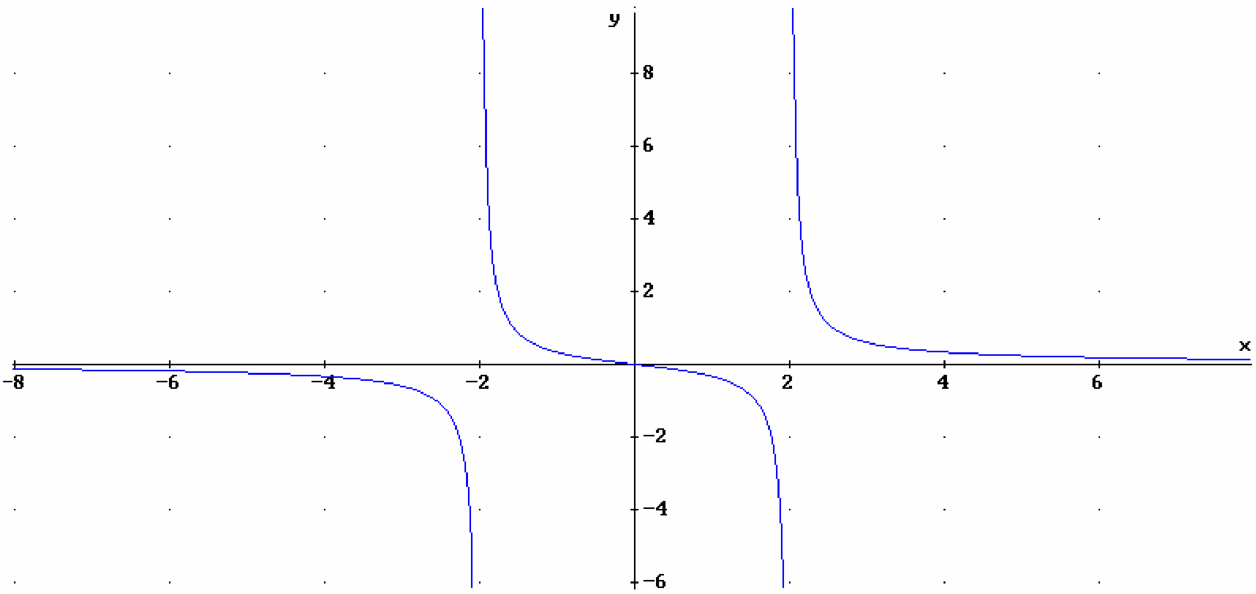
2) Simetrías. $f(-x) = \frac{-x}{x^2-4} = -f(x)$, luego es una función impar cuya gráfica es simétrica respecto al origen.
Cortes con los ejes:

OY: Si *x = 0*, $f(0) = \frac{0}{-4} = 0$; luego *(0, 0)*.

OX: Si y = 0, $\frac{-x}{x^2-4} = 0$; de donde: *x = 0*. Luego: *(0, 0)*.

3) Hallamos la derivada primera: $f'(x) = -\frac{x^2+4}{\left(x^2-4\right)^2}$ que es menor que 0 para todo x de D.

Luego es decreciente en D = R – {-2, 2}
4) Al ser monótona decreciente no tiene extremos en su dominio.
5)



Opción 2-b

Dada la función $f(x)=\begin{cases} -x+1 & si \quad x\le 1 \\ -x^2+4x-3 & si \quad 1<x\le 3 \\ \dfrac{x-3}{x} & si \quad x>3 \end{cases}$

a) Estudiar su continuidad y derivabilidad. Indicando sus respectivos dominios.
b) Hallar los puntos de corte de su gráfica con los ejes y las asíntotas.
c) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión si existen.
d) Representar su gráfica.

SOLUCIÓN
a) f es continua en (- ∞, 1) por venir dada en ese intervalo por una expresión polinómica. Por idénticas razones es continua en (1, 3). En (3, + ∞) es continua por venir dada por una función racional que cuyo denominador no se anula en dicho intervalo. Queda por estudiar la continuidad en $x = 1$ y en $x = 3$.
En x = 1 es continua si se cumple: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)= f(1)$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(-x^2+4x-3)=0$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(-x+1\right)=0= f(1)$; luego es continua en $x = 1$.
En x = 3: Se ha de cumplir: $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)= f(3)$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\left(-x^2+4x-3\right)=0= f(3)$; luego f es continua en $x = 3$.
El dominio de continuidad de f coincide con el dominio de definición: R.

Estudio de la derivabilidad:
En (- ∞, 1), $f'(x)=-1$
En (1, 3), $f'(x)=-2x+4$
En (3, + ∞), $f'(x)=\dfrac{3}{x^2}$
Queda por estudiar si es derivable en x = 1 y en x = 3:
En x = 1: $f'(1-)=-1$; $f'(1+)=2$. No es derivable en x = 1.
En x = 3: $f'(3-)=-2$; $f'(3+)=\dfrac{1}{3}$. No es derivable en x = 3.

Luego: $f'(x)=\begin{cases} -1 & si \quad x<1 \\ -2x+4 & si \quad 1<x<3 \\ \dfrac{3}{x^2} & si \quad x>3 \end{cases}$.

b) Corte OX: si $y = 0$, $f(x) = 0$ será: -x + 1 = 0; $-x^2 +4x – 3 = 0$; de donde: x = 1 y x = 3.
Puntos de corte con OX: (1, 0) y (3, 0).
Corte con OY: Si $x = 0$, $f(0) = 1$; de donde: (0, 1).
Asíntotas: AH: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x-3}{x}=1$; luego: $y = 1$.
No tiene asíntotas verticales ni oblicuas.

c) Estudiando el signo de la derivada primera tendremos:

	(-∞, 1)	(1, 2)	(2, 3)	(3, +∞)
f'(x)	-	+	-	+
f(x)	Decreciente	Creciente	Decreciente	creciente

En x = 2 se anula la derivada primera. Si hallamos la derivada segunda:

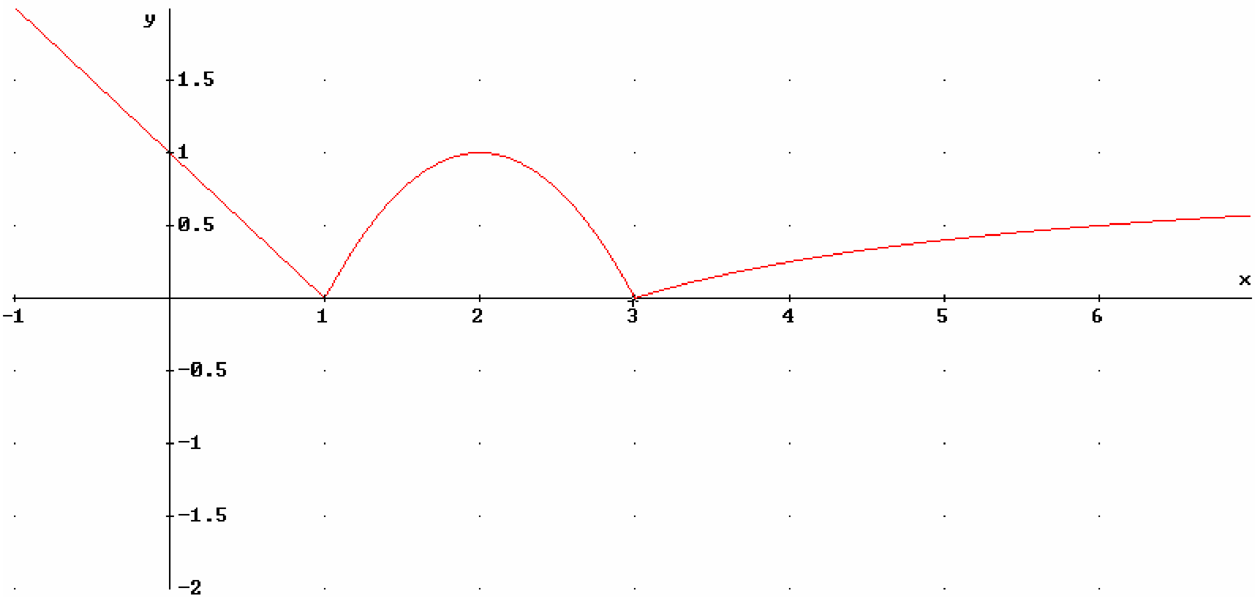
$$f''(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x<1 \\ -2 & si \quad 1<x<3 \\ \dfrac{-6}{x^3} & si \quad x>3 \end{cases}$$ vemos que en x = 2 tenemos un máximo y quedan por estudiar los puntos de abscisa x = 1 y x = 3 en que la función no es derivable pero donde puede tener extremos relativos.

.

Si estudiamos su signo en la siguiente tabla:

	(-∞, 1)	(1, 3)	(3, +∞)
f''(x)	0	-	-
f(x)	constante	Cóncava ∩	Cóncava ∩

d) La gráfica de la función es



Como puede verse en la gráfica alcanza dos mínimos en x = 1 y x = 3.

BLOQUE 3 (3 Puntos)

Opción 3 -a

Se cree que el número y de unidades vendidas de un determinado producto en función de precio en euros, x, viene dado por y = 50 – x, donde el precio varía entre 0 y 50 euros. Si por cada unidad vendida se obtiene un beneficio x – 10, determinar de forma razonada el precio x que producirá un mayor beneficio, el número de unidades vendidas y el beneficio obtenido.

SOLUCIÓN

Sea x el precio por unidad, y = 50 – x el número de unidades vendidas.
El beneficio por cada y unidades vendidas vendrá dado por:
$B(x) = (50 - x)(x - 10) = -x^2 + 60x - 500$
Derivando la función: $B'(x) = -2x + 60$, que se anula para $x = 30$
Hallando la derivada segunda: $B''(x) = -2$; de donde para $x = 30$ se alcanza el valor máximo. Por lo tanto a ese precio se venderán 20 unidades y se obtendrá un beneficio máximo de 400 €.

Opción 3 -b

.- Dada la función $y = \left|x^2 - 5x + 6\right|$. Se pide:

a) Hallar en qué punto (o puntos) de su dominio carece de derivada. Razonar la respuesta.

b) Determinar la ecuación de la tangente a la gráfica de dicha función en el punto de abscisa x = 2'5.

c) Estudiar la monotonía de la función y sus posibles extremos.

SOLUCIÓN:
Reescribimos, en primer lugar, la función. Como $x^2 - 5x + 6 = 0$ tiene por soluciones x = 2 y x = 3, tendremos: $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$, cuyo signo:

	$(-\infty, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
$(x - 2)$	-	+	+
$(x - 3)$	-	-	+
$x^2 - 5x + 6$	+	-	+

De donde podemos escribir:

$$y = \begin{cases} x^2 - 5x + 6 & si \quad x \leq 2 \\ -x^2 + 5x - 6 & si \quad 2 < x < 3 \\ x^2 - 5x + 6 & si \quad x \geq 3 \end{cases}$$

a)

	$(-\infty, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
y'	2x - 5	-2x + 5	2x - 5

En x = 2, tendremos $y'(2-) = 4 - 5 = -1$; $y'(2+) = -4 + 5 = 1$; por lo tanto no es derivable en $x = 2$
En x = 3, $y'(3-) = -6 + 5 = -1$; $y'(3+) = 6 - 5 = 1$; por lo tanto no es derivable en x = 3.

b) $y'(2{,}5) = -2 \cdot 2{,}5 + 5 = 0$ luego la tangente es paralela al eje de abscisas en ese punto, por tanto: $y = 0{,}25$

c) Estudiamos el signo de la derivada primera:

	$(-\infty, 2)$	$(2, 2{,}5)$	$(2{,}5, 3)$	$(3, +\infty)$
y'	+	+	-	-
y	Crece	Crece	Decrece	Decrece

Como la derivada se anula en x = 2,5, tendremos en ese punto un máximo.

Como no es derivable en x = 2 ni en x = 3, es necesario estudiar dichos puntos para ver si en ellos alcanza valores extremos.

Si representamos la función, observamos claramente en la gráfica que la función alcanza mínimos en x = 2 y x = 3.