Problemas de Análisis

.- Dada la función f definida por: $f(x)=\begin{cases} e^x & si \quad x\le 0 \\ 2x^2+1 & si \quad 0<x\le 2 \\ x^3+1 & si \quad x\ge 2\end{cases}$, se pide:

1.- Estudiar su continuidad en todo R.
2.- Estudiar su derivabilidad en todo R y obtener la función derivada f ‘(x).
3.- Hallar la ecuación de la tangente a la curva en x = -1.

.- Dada una función f(x) $f(x)=\begin{cases} |x+1| & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{2}{x} & si \quad 1<x\le 4 \\ a & si \quad 4<x\end{cases}$

Se pide:

1.- Estudiar su continuidad y hallar *a* para que sea continua en x = 4.
2.- Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
3.- Hallar la pendiente de la recta tangente a f(x) en x = 3 y en x = 5.
4.- Dibujar su gráfica.

.- Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{1}{x} & si \quad 0<x<1 \\ \ln x & si \quad x\ge 1\end{cases}$. Se pide:

a) Estudiar su continuidad e indicar en qué puntos presenta discontinuidades.
b) Hallar la función derivada y = f ’(x).
c) Representar gráficamente y = f(x).

.- Dada la función $f(x)=\begin{cases} -e^x & si \quad x<0 \\ x+1 & si \quad 0\le x<2 \\ \dfrac{k}{x} & si \quad x\ge 2\end{cases}$. Se pide:

a) Estudiar su continuidad en x = 0.
b) Determinar que valor ha de tomar k para que f sea continua en x = 2.
c) Determinar, para el valor de k hallado en b), la función derivada de f, es decir, f’(x).
d) Indicar cuáles son el dominio de continuidad de f y su dominio de derivabilidad y explicar por qué hay diferencias entre ambos.

.- Sea la función $f(x)=\left|x^3-9x\right|$. Se pide:

a) Estudiar su dominio, posibles simetrías y puntos de corte con los ejes.

b) Determinar los intervalos de crecimiento, decrecimiento y sus extremos relativos.
c) Determinar los intervalos de concavidad, convexidad y puntos de inflexión.
d) Hacer un esbozo de su gráfica.

.- Dada la función definida $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{x} & x<-8 \\ -2m+3 & -8\le x<-4 \\ x-\dfrac{1}{n} & -4\le x<2 \\ px & 2\le x<4 \\ q^2 & x\ge 4 \end{cases}$, hallar los valores de m, n, p y q para f

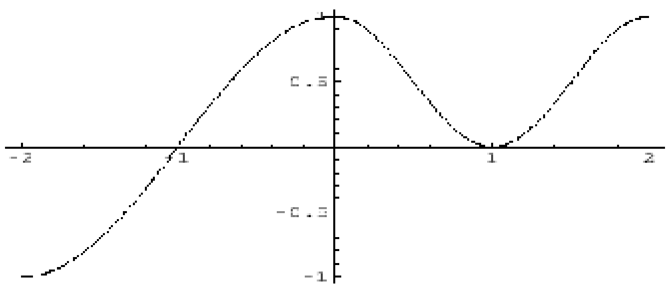
sea continua en todo R. Razona las respuestas.

.- Halla las derivadas siguientes:

a) $D\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}\right)$ b) $D\left(\ln(e^{x^2+1})\right)$ c) $D\left(2^{x^2+1}\cdot 5^{x^2+x+1}\right)$

.- Dada la función $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$

a) Hallar su dominio, puntos de corte con los ejes y las asíntotas horizontales y verticales, si existen, de f.
b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f y sus extremos relativos, si tiene.
c) Estudiar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de f.
d) Haz un esbozo de la gráfica de la función indicando las coordenadas, cuando sea posible, de los extremos relativos y puntos de inflexión.



.- Una función f(x) tiene por dominio el intervalo (2; 2). El gráfico que aparece más abajo corresponde a la representación de la FUNCIÓN DERIVADA DE f, es decir, es el gráfico de y = f ’(x) NO el de y = f(x). Se pide:

a) Utilizando este gráfico determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de la función y = f(x) o bien explica por qué no pueden obtenerse estos resultados de los datos proporcionados por el gráfico.

b) ¿Podrían determinarse a partir de ese gráfico los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de y = f(x)?. Razona la respuesta.

c) Indica para qué valores de x la tangente a la curva y = f(x) es paralela al eje de abscisas y si hay algún valor de x para el que la tangente es paralela a la recta de ecuación $y = x - 10$ Justifica la respuesta.

.- Dada la curva de ecuación $y = \dfrac{3x-1}{3x^2+1}$. Se pide:

a) Hallar para qué valores de x, la recta tangente a esa curva es paralela al eje OX.

b) Explica qué relación existe entre esos valores y las abscisas de los extremos relativos de la función.

c) Determina, en este caso, si la función alcanza sus extremos en los valores calculados en el apartado a) y, en caso afirmativo, indica si se trata de un máximo o un mínimo.

.- Una población bacteriana tiene un crecimiento dado por la ecuación $f(t) = 5000 + 100\, t^2$, siendo t el tiempo medido en horas. Se pide:

a) Velocidad media del crecimiento en el intervalo [0, 10].
b) Velocidad instantánea de crecimiento.
c) Velocidad instantánea de crecimiento en t = 10 horas.

.- La recta de pendiente 3 que pasa por el punto (0, -2) es tangente a la curva $y = x^3$. Calcula las coordenadas del punto de tangencia.

.- En un modelo para los costes de almacenamiento y transporte de materiales para un proceso de manufactura, se ha obtenido la siguiente función de coste:
$C(x) = 100\left(100 + 9x + \dfrac{144}{x}\right)$ donde C(x) es el coste total (en dólares) de almacenamiento y transporte durante tres meses de x toneladas de material.

1.- ¿Qué cantidad de materiales hace que el coste sea mínimo?.
2.- ¿Cuáles son las asíntotas de esta función?
3.- Representar dicha función para los valores de x $0.

.- Determinar el intervalo cerrado en que la función $y = f(x) = x - x^2$ verifica todas las propiedades siguientes:
(i) y >= 0 (ii) f es creciente (iii) f'' es negativa

(iv) $f(0) = 0$ (v) Existe un máximo.

Representar gráficamente dicha función.

.- Una empresa de ordenadores tiene unos ingresos y unos costes de producción diarios que se ajustan a las siguientes funciones (x = nº de unidades producidas).

Ingresos (miles de pesetas):	$I(x) = 60x - x^2$
Costes de producción (miles de pta):	$C(x) = x^2 - 12x + 120$

1.- Determinar para qué número de unidades producidas se obtienen los ingresos máximos y a cuánto ascienden estos ingresos.
2.- Hallar la función beneficio *B(x)* (ingresos - costes de producción).
3.- ¿Se obtienen también beneficios máximos para el número de unidades producidas que dan los ingresos máximos?. Razona la respuesta aportando los desarrollos y resultados en que se basa.

.- Se quiere construir un depósito cilíndrico cerrado de 6 m^3 de capacidad. ¿Qué dimensiones deberán tener el radio de la base y la altura del cilindro para que el coste del material empleado en su fabricación sea mínimo?

.- Dada la función $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$, se pide:

a) Hallar sus puntos de corte con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos.

b) Determinar en qué puntos la tangente a la gráfica de esa función es paralela a la recta de ecuación: $y = 3x + 2$.

c) Hallar el área de la región encerrada por la curva $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$ y la recta de ecuación: $y = 3x + 2$.

.- Sea la función: $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x+3}$

1.- Dominio de definición de f(x).
2.- Asíntotas de la función.
3.- Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
4.- Recta tangente en x = - 2.
5.- Hacer un dibujo aproximado de la gráfica.

.- Dada la función: $f(x) = \begin{cases} |x+1| & si \quad x \leq 1 \\ \dfrac{2}{x} & si \quad 1 < x \leq 4 \\ a & si \quad 4 < x \end{cases}$, se pide:

1.- Estudiar su continuidad y hallar el valor de *a* para que sea continua en x = 4.

2.- Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
3.- Trazar su gráfica.
4.- Hallar el área de la región limitada por la gráfica de f(x) y las rectas de ecuaciones:

x = -1, x = 5 , y = 0

.- Calcular las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx$ b) $\int x^2 e^x dx$

c) $\int \frac{3x+5}{(x-1)^2(x+1)}dx$ d) $\int (x\sqrt{x} - 2\frac{x}{\sqrt[3]{x^2}})dx$

.- a) Sea la función $f(x) = \frac{x^2}{4-x}$. Determinar el área encerrada por la curva y las rectas x = 8 y x = 16.

.- b) Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = 2x^3 - 2x$ y el eje de abscisas.

.- a) Una empresa estima que la tasa de variación de gastos de mantenimiento de sus equipos informáticos viene dada por la función: $m(t) = 10 + 10t + 4t^2$ Donde t se mide en años, y m en miles de pesetas/año. Dibujar la gráfica y hallar el área encerrada por la curva y el eje de abscisas entre los valores t = 0 t = 5. ¿Qué representa el resultado?.

.- b) Un publicista diseña un cartel publicitario que tiene la siguiente forma: base horizontal de 10 metros de longitud y resto del contorno limitado por la gráfica de la función: $g(x) = \begin{cases} -x^2+6x & 0 \le x \le 5 \\ -x+10 & 5 < x \le 10 \end{cases}$ Se pide calcular la superficie del cartel.

.- a) Dada la función $f(x) = x + \frac{a}{x^3}$, donde a es una constante. Se pide:

a) Hallar una primitiva de f.
b) Si F es una primitiva de f, ¿puede serlo también G(x) = F(x) + 2x?. ¿Por qué?.

c) Hallar *a* sabiendo que $\int_1^2 f(x)dx = 1'5$

.- Una función f(x) verifica que f ´´(x) = 6x. Halla f(x) sabiendo que pasa por (1, 5) y que la pendiente de la tangente a la curva en (0, -5) es 2.

.- Dada la función: $f(x) = \log\frac{x-1}{x+1}$ Se pide:
a) Determinar su dominio y estudiar su monotonía.
b) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad.
c) Completar el estudio de la función que permita hacer un esbozo de su gráfica.

.- Dada la función: $f(x)=\dfrac{x^3}{1-x^2}$ Se pide:

a) Hallar su dominio y recorrido. Simetrías. Puntos de corte con los ejes e intervalos de signo constante.

b) Determinar las asíntotas, estudiar la monotonía, extremos, curvatura y puntos de inflexión.

c) Trazar su gráfica.

.- Sea la función $f(x) = x^3 - 4x$

a) Obtener sus cortes con los ejes, máximos, mínimos y puntos de inflexión.
b) Obtener las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos de corte con los ejes.
c) Representarla gráficamente.
d) Hallar el área del recinto plano que limita esa curva y el eje de abscisas.

.- Dada la función $y=\left|x^2-5x+6\right|$. Se pide:

a) Hallar en qué punto (o puntos) de su dominio carece de derivada. Razonar la respuesta.

b) Determinar la ecuación de la tangente a la gráfica de dicha función en el punto de abscisa x = 2'5.

c) Estudiar la monotonía de la función y sus posibles extremos.

.- Una población bacteriana tiene un crecimiento dado por la ecuación:
$p(t)=5000+100t^3-250t^2+200t$ siendo t el tiempo en horas. Se pide:

a) La velocidad media de crecimiento en el intervalo de t = 1 a t = 4.

b) La velocidad instantánea de crecimiento en t = 5 horas.

c) Estudiar en las cinco primeras horas en qué momentos crece la población y si hay algún intervalo de tiempo en que ésta decrece. Determinar en qué instantes la población es mínima y máxima.

.- a) Hallar el valor (o valores) del parámetro *a* para que la función:
$f(x)=\begin{cases} e^x & si \quad x<1 \\ (a^2+2a)x+e & si \quad x\geq 1 \end{cases}$ sea continua en x = 1 (e es la base de los logaritmos neperianos).

b) Determinar los siguientes límites para a = 1: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

.- Dada la función $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{3}{2}x-6 & si \quad -\dfrac{14}{3}\le x<-2 \\ -x^2+1 & si \quad -2<x<1 \\ x^2-4x+3 & si \quad 1<x\le 3 \end{cases}$ se pide:

a) Hallar su dominio y su recorrido.

b) Determinar en qué puntos de su dominio presenta discontinuidades y señalar de qué tipo son.

c) Calcular: $\lim_{x\to -1} f(x)$, $\lim_{x\to 1} f(x)$

.- Dada la función $f(x)=\dfrac{3x^2+15}{x+2}$, calcula sus asíntotas y sus extremos. Utilizando esa información, representa aproximadamente f(x).

.- Dada la función g(x)=6x, sabemos que g(x) es la derivada segunda de otra función G(x). Sabemos además que G(x) pasa por (-1,0) y (3,0). Calcula la función G(x) y el área que limita G(x) con el eje de abscisas.

.- Dada la función $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$

a) Hallar su dominio, puntos de corte con los ejes y las asíntotas horizontales y verticales, si existen, de f.
b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f y sus extremos relativos, si tiene.
c) Estudiar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de f.
d) Haz un esbozo de la gráfica de la función indicando las coordenadas, cuando sea posible, de los extremos relativos y puntos de inflexión.

.- Dada la función $f(x)=\begin{cases} -e^x & si \quad x<0 \\ x+1 & si \quad 0\le x<2 \\ \dfrac{k}{x} & si \quad x\ge 2 \end{cases}$. Se pide:

a) Estudiar su continuidad en x = 0.
b) Determinar que valor ha de tomar k para que f sea continua en x = 2.
c) Determinar, para el valor de k hallado en b), la función derivada de f, es decir, f'(x).
d) Indicar cuáles son el dominio de continuidad de f y su dominio de derivabilidad y explicar por qué hay diferencias entre ambos.

.- Calcula el área del recinto limitado por la curva $y = 2x^3 - 2x$ y el eje de abscisas.

.- Una empresa estima que la tasa de variación de gastos de mantenimiento de sus equipos informáticos viene dada por la función :

$$m(t) = 100 + 100\,t + 40\,t^2$$

donde t se mide en años y m en euros/año. Se pide:
a) Dibujar la gráfica y hacer una interpretación.
b) Hallar el área encerrada entre la curva anterior y el eje de abscisas, entre los valores t = 0 y t = 5. ¿Qué representa el resultado?.

.- Sea la función $f(x) = 2x^3 + bx^2 + ax - 5$
a) Hallar los valores de *a* y *b* de forma que f tenga un máximo en x = 1 y un mínimo en x = 2.
b) Hallar el área de la región limitada por la gráfica de *f(x)* y el eje OX entre x = 0 y x = 3.

SOLUCIÓN:

a) Si la función f tiene extremos relativos en x = 1 y x = 2 su derivada se anula para dichos valores, por lo tanto como $f'(x) = 6x^2 + 2bx + a$, tendremos:
$f'(1) = 6 + 2b + a = 0$; $f'(2) = 24 + 4b + a = 0$
de donde obtenemos, resolviendo el sistema, que: *a = 12* y *b = -9*.
Hallamos la derivada segunda: $f''(x) = 12x - 18$ y particularizando para x = 1 y x = 2, tendremos: $f''(1) = 12 - 18 = -6$, por lo tanto la función f alcanza, efectivamente, un máximo en x = 1.
$f''(2) = 24 - 18 = 6$, lo que prueba que f alcanza un mínimo para x = 2.
b) Para hallar el área de la región indicada es preciso estudiar el signo de la función f. Si se factoriza f, utilizando la regla de Ruffini, tendremos: $f(x) = (2x - 5)(x - 1)^2$
Formando una tabla se obtiene que:

f es negativa en los intervalos: (- 4, 1) c (1, 5/2)
f es positiva en el intervalo: (5/2, + 4).

En consecuencia el área pedida vendrá dada por: $A = \int_0^3 \left|2x^3 - 9x^2 + 12x - 5\right| dx$, que se podrá poner como:

$$A = -\int_0^{\frac{5}{2}} \left(2x^3 - 9x^2 + 12x - 5\right) dx + \int_{\frac{5}{2}}^{3} \left(2x^3 - 9x^2 + 12x - 5\right) dx = \frac{51}{16}.$$

.- Dada la función $f(x) = x + \dfrac{a}{x^3}$, donde *a* es una constante,
a) Encontrar una primitiva de f.
b) Si F es una primitiva de f, ¿puede serlo también G(x) = F(x) + 2x?.
c) Encontrar *a* sabiendo que $\int_1^2 f(x)\,dx = 1'5$

SOLUCIÓN:

a) La integral indefinida nos da todas las primitivas de f, luego:

$$\int\left(x+\frac{a}{x^3}\right)dx=\int xdx+a\int x^{-3}dx=\frac{x^2}{2}-\frac{a}{2x^2}+C$$

al tomar C valores en R obtenemos las primitivas de f.

b) Si derivamos G se obtiene: G' (x) = F'(x) + 2 = f(x) + 2, luego G'(x) es distinto de f(x) y por lo tanto no es una primitiva de esta función.

$$\int_1^2 f(x)dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{a}{2x^2}\right]_1^2=\frac{3}{2}-\frac{3a}{8}=1'5$$

, de donde: *a = 0*.

.- Calcular $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx$. ¿Cuál es el significado geométrico del valor de esta integral?.

SOLUCIÓN:

La división entera de $\frac{x^2}{x+1}$ da como cociente *x - 1* y como resto *1*, de donde:

$\frac{x^2}{x+1}=x-1+\frac{1}{x+1}$, luego:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx=\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|\right]_0^1$$

, de donde:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx=\frac{1}{2}-1+\ln 2-\ln 1=-\frac{1}{2}+\ln 2$$

Al estudiar el signo de $\frac{x^2}{x+1}$ se tiene que toma valores mayores que cero en (-1, + 4) y negativos en (- 4, - 1), luego es positiva en el intervalo [0, 1]. En consecuencia la integral definida $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx$ representa el área de la región del plano comprendida entre la curva $y=\frac{x^2}{x+1}$, el eje OX y las rectas x = 0 y x = 1.

.- Dada la función $f(x)=\begin{cases} |3-x| & si \quad x<4 \\ ax-7 & si \quad 4\le x \end{cases}$. Se pide.

1. Hallar el valor de *a* para que f sea continua en x = 4.
2. Para el valor de a, hallado en el apartado anterior, representar gráficamente la función en el intervalo [0, 5] y hallar el área de la región comprendida entre dicha gráfica, el eje OX y las rectas x = 1 y x = 5.

.- Resolver $\int_2^3 xe^{-2x}dx$.

.- Calcular el área del recinto plano limitado por el eje OX y las gráficas de las funciones $y=x^2+4x+4$ e $y=2x+3$.

.- Hallar el área de la región comprendida entre las curvas determinadas por $f(x) = 4 - x^2$ y $g(x) = 3x^2$.

.- Halla el área del recinto limitado por el eje OX y la función $y = x^3 - 6x^2 + 8x$.

.- Las pérdidas o ganancias, y, de una empresa siguen una ley $y = \dfrac{2x-4}{x+2}$, siendo x los años de vida de la empresa.

1. Determinar el año en que la empresa deja de tener pérdidas.

2. ¿Están sus beneficios limitados?. Si lo están, ¿cuál es su límite?.

3. ¿Cuánto son los beneficios o pérdidas acumulados los tres primeros años?

.- Dada la función $y = -\ln x^2$, se pide:
1. Determinar su dominio, extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento.
2. Hallar el área de la región del plano limitada por su gráfica, el eje OX y las rectas x = e y x = e^2.

.- Se sabe que la función F(x) tiene por derivada $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ y que F(0) = 3. Se pide:
1. Determinar F(x).
2. Hallar el área de la región del plano comprendida entre la gráfica de f(x) y la recta *y = 2x*.

.- Supongamos que el rendimiento r en % de un alumno en un examen de una hora viene dado por r = 300t(1 - t) donde 0 <= t <= 1 es el tiempo en horas. Se pide:

(i) ¿En qué momentos aumenta o disminuye su rendimiento?

(ii) ¿En qué momentos su rendimiento es nulo?.

(iii) ¿Cuándo se obtiene el mayor rendimiento y cuál es?.

.- Conocidas las gráficas de las funciones y = cos x e y = ln x, representa:

a) y = 2 + ln x b) y = 1 + cos 2x

.- El área ocupada por una infección cutánea se desarrolla a partir del instante t = 0 según la función $f(t) = 10 + \dfrac{t}{t^2+1}$

(i) Calcular la superficie ocupada por la infección al principio.
(ii) Hallar el instante en que es máxima el área afectada y calcular dicha área.
(iii) Estudiar qué ocurre con el transcurso del tiempo. ¿Se estabiliza o desaparece la infección?.

.- Un grave problema ecológico es la destrucción de grandes extensiones de arbolado. Supongamos que este fenómeno se rige por la ley $y = \ln x$, donde x representa el tiempo en años e y es el número de millares de hectáreas de bosque desaparecidas hasta ese momento.

a) Dibuja la gráfica de dicha función. ¿Podemos asegurar que la superficie de arbolado destruida permanecerá acotada por debajo de algún valor en el futuro?. Justifica la respuesta.

b) ¿Cuál es la tasa instantánea de destrucción en el año número 3? ¿y en un año cualquiera x?. ¿Es cierto que siguiendo la función $y = \ln x$ cada año se destruirá menos que el anterior?. ¿Podríamos concluir entonces que nunca llegará un momento en que desaparezcan todos los árboles?.

.- Si suponemos que el momento actual corresponde al valor $x = 0$ de la variable tiempo, las pérdidas o ganancias (y) de una empresa fundada el año pasado siguen una ley del tipo: $y = \frac{x}{x+1}$. Apoyándose en la representación gráfica de esta función, determina:

a) El momento (valor de x) a partir del cuál la empresa tendrá ganancias.
b) La ganancia máxima previsible en el futuro, si existe.
c) Existirá algún momento en el futuro en el que las ganancias comiencen a disminuir?.
d) ¿Tendría sentido aplicar esta ley a una empresa fundada hace 3 años?. Justifica las respuestas.

.- Un alambre de 100 m. se corta en dos partes, y con una de ellas se forma una circunferencia y con la otra un cuadrado. ¿Cómo ha de cortarse el alambre para que la suma de las áreas sea mínima?.

.- Hallar la longitud de los lados del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en una semicircunferencia de radio 10 m., de forma que su base inferior esté sobre el diámetro.

.- Demostrar que todas las derivadas de orden par de la función f(x) = senx.cosx son nulas en el origen.

.- Hallar el punto de la curva $y = \ln(1 + x^2)$ en el que la tangente es perpendicular a la tangente trazada por x = 1.

.- Sea $f(x) = |x^2 - 4|$. Se pide:

a.- Razonar en qué puntos es derivable y en cuáles no.

b.- Estudiar la existencia de máximos y mínimos.

P.A.U. en la Comunidad Autónoma de Cantabria

.- (Cantabria. Junio 1996) Sea la función: $f(x)=\frac{(x+2)^2}{x+3}$ Se pide:

a) Su dominio de definición.
b) Asíntotas de la función.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
d) Recta tangente en x = - 2.
e) Hacer un dibujo aproximado de su gráfica.

.- (Cantabria. Junio 1996) Dividir un segmento de 1 m de longitud en tres partes, dos de las cuales sean tales que una tenga el doble de longitud que la otra, de modo que la suma de las áreas de los semicírculos construidos sobre ellas, cuyo radio es la mitad de cada una de las partes, sea mínima.

.- (Cantabria. Septiembre 1996)
La siguiente función representa la diferencia entre ventas y compras de una empresa durante un periodo de 7 años,
$f(x) = x^3 – 10x^2 +21x$
1. ¿En qué momento fue la diferencia citada máxima?
2. ¿En qué momento fue la diferencia citada mínima?
3. ¿Cuándo crecieron más las ventas que las compras?. ¿Cuándo sucedió lo contrario?

.- a) Dibujar el recinto limitado por las gráficas de las siguientes curvas: $f(x) = x^2 + 2$; $g(x) = x + 2$, $0 = x = 2$
(b) Calcular el área del recinto anterior.

.- (Cantabria, Septiembre 1996). Sean las funciones $f(x) = x^3 - 9x$ y $g(x) = - x^2 + 2x + 3$

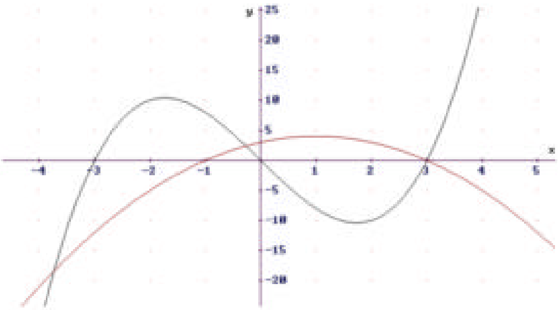
1. Determinar los puntos de corte de ambas funciones con el eje OX.
2. Dar las abscisas en las que se cortan las curvas representativas de las dos funciones.
3. Determinar el área encerrada por ambas curvas.

SOLUCIÓN:

1. Cortes de y = f(x) con OX: $x^3 - 9x = 0$, o bien: $x(x - 3)(x + 3) = 0$ de donde se obtienen como puntos de corte con OX: (- 3, 0); (0, 0); (3, 0).

Cortes de y = g(x) con OX: $- x^2 + 2x + 3 = 0$, de donde, resolviendo la ecuación, se obtienen: (-1, 0) y (3, 0).

2. Para hallar las abscisas de los puntos en que se cortan las gráficas de ambas funciones, hemos de resolver la ecuación: $x^3 - 9x = - x^2 + 2x + 3$ o la equivalente:
$x^3 + x^2 - 11x - 3 = 0$
Como por los resultados del apartado anterior se sabe que x = 3 es una solución se tiene:
$x^3 + x^2 - 11x - 3 = (x - 3)(x^2 + 4x + 1) = 0$ de donde las abscisas buscadas son:
x = 3; $x=-2-\sqrt{3}$; $x=-2+\sqrt{3}$



3. Si se observan las gráficas de ambas funciones y se tienen en cuenta los resultados del apartado anterior, tendremos que el área pedida vendrá dada por:

$$\int_{-2-\sqrt{3}}^{-2+\sqrt{3}} \left(x^3-9x-\left(-x^2+2x+3\right)\right)dx+\int_{-2+\sqrt{3}}^{3} \left(-x^2+2x+3-\left(x^3-9x\right)\right)dx$$

$$\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-11\frac{x^2}{2}-3x\right]_{-2-\sqrt{3}}^{-2+\sqrt{3}}+\left[-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+11\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-2+\sqrt{3}}^{3}=30\sqrt{3}-\frac{37}{3}$$

.- (Cantabria, Junio 1997) La elaboración de cada unidad de un producto cuesta 1 500 000 pesetas. Si se venden 30 unidades se obtienen unos ingresos de 60 millones de pesetas y se consideran beneficios la diferencia entre los ingresos y los costes.
Por estudios de mercado se sabe que por cada 1% de descuento que se haga en el precio de venta se venden 2 unidades más. Determinar:
1. Los beneficios que se obtienen por unidad, si no se hacen descuentos.
2. La expresión matemática que rige los beneficios si se hacen descuentos.
3. ¿Cuántas unidades se deben vender si se desea obtener el máximo beneficio?

.- (Cantabria, Junio 1997) Sea la expresión $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$
1. Hallar el dominio de definición de x para que f(x) sea una función.
2. Determinar las asíntotas de la función.
3. Dar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
4. Hacer un dibujo aproximado de la gráfica.

.- (Cantabria. Septiembre 1997) Una empresa quiere subcontratar el transporte de mercancías que produce, para lo cual pide ofertas a dos transportistas.
- El primero hace lo siguiente. 1 000 000 de pesetas fijas más 50 pesetas por Kg transportado.
- La oferta del segundo es: 2 000 000 de pesetas fijo por cualquier número de kg transportado que sea inferior a 10000 y cada kg que exceda esa cantidad a 25 pesetas.

En ambas ofertas no se ha incluido el 16% de IVA.
1. Dar las expresiones matemáticas que nos indican las cantidades que ha de pagar en cada caso.
2. En función del número de kg transportados decir a qué oferta le interesa acogerse.

.- (Cantabria. Septiembre 1997) Hallar las dimensiones que hacen mínimo el coste de un contenedor que tiene forma de paralelepípedo rectangular, sabiendo que: su volumen es de 16 m^3, su altura 2 m y el coste de construcción por m^2 es de 5000 pesetas para la base, 6000 para cada pared lateral y 7000 para la tapa.

.- (Cantabria, Junio 1998) Sea la función $f(x)=\dfrac{x^2}{4-x}$. Determinar:

1. Su dominio de definición.
2. Sus asíntotas.
3. Situación de la curva en relación a sus asíntotas.
4. Máximos y mínimos.
5. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
6. Área encerrada por la curva, la asíntota correspondiente y las rectas x = k, x = 2k, siendo k el punto en que la función tiene un máximo relativo.

SOLUCIÓN:

1. Dominio de f: R - {4}
2. Asíntotas verticales: x = 4. Asíntotas horizontales no tiene.

Asíntotas oblicuas:

Como: $\dfrac{x^2}{4-x}=-x-4+\dfrac{16}{4-x}$ tiene una asíntota oblicua de ecuación: *y = -x - 4* .

3. El comportamiento de la gráfica en torno a la asíntota x = 4 será:

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{x^2}{4-x}=-\infty \; ; \; \lim_{x\to 4^-}\frac{x^2}{4-x}=+\infty$$

Cuando x tiende a más o menos infinito la gráfica se aproxima a *y = -x - 4* .

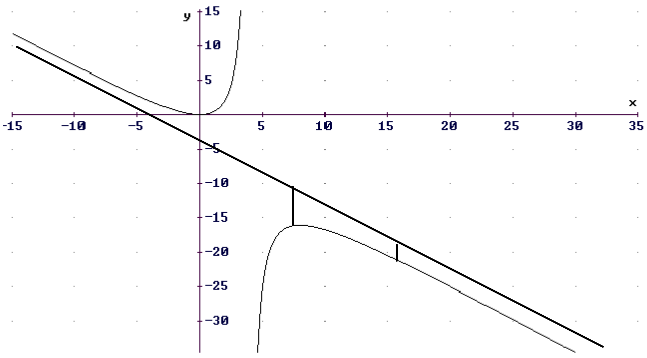
4. $f'(x)=\dfrac{8x-x^2}{(4-x)^2}$ tenemos: *f''(0) > 0* mínimo en *x = 0*; *f''(8) < 0*, máximo en *x = 8*.

Luego: mínimo (0, 0); máximo (8, -16).

5. Hacemos la siguiente tabla para estudiar el signo de *f'(x)*:

	0	4	8	
x	-	+	+	+
8 - x	+	+	+	-
f'(x)	-	+	+	-
f(x)	9	8	8	9

Luego: f creciente en (0, 4) y (4, 8); f decreciente en (- 4, 0) y (8, + 4).



6. Si se traza la gráfica, (ver figura) como la función alcanza el máximo relativo en *x =8* y la asíntota horizontal tiene por ecuación

$y = - x - 4$, tendremos que se ha de hallar el área de la región del plano comprendida entre la recta

$y = - x - 4$, la curva $y = \frac{x^2}{4-x}$ y las rectas de ecuaciones: $x = 8$ y $x = 16$.

El área vendrá dada por la siguiente integral:

$$\int_8^{16}\left(-x-4-\frac{x^2}{4-x}\right)dx = \int_8^{16}\frac{16}{x-4}dx = \left[16\ln|x-4|\right]_8^{16} = 16\ln 3$$

.- (Cantabria , Junio de 1998) Deseamos comprar 18 ordenadores y en el mercado hay dos tipos. Sabemos que el beneficio que podemos obtener de su uso está dado por el producto del número de ordenadores de un tipo que se compra por el cuadrado del número de ordenadores del otro tipo que se adquiere. Determinar el número de ordenadores de cada tipo que debemos adquirir para que el beneficio sea máximo.

SOLUCIÓN:

x = nº de ordenadores de tipo 1; y = nº de ordenadores de tipo 2.

$x + y = 18$

Si se representa por $f(x,y)$ el beneficio, tendremos $f(x,y) = x\, y^2$

De donde: $f(x) = x(18 - x)^2 = x^3 - 36x^2 + 324x$

$f'(x) = 3x^2 - 72x + 324$, si igualamos a 0, se obtiene: $3x^2 - 72x + 324 = 0$ que tiene como soluciones:

$x = 6$, $x = 18$

Hallando la derivada segunda y sustituyendo los valores anteriores, se obtiene:

$f''(x) = 6x - 72$; $f''(18) = 36 > 0$; luego se alcanza un mínimo en $x = 18$.

$f''(6) = -36 < 0$; luego se alcanza un máximo en $x = 6$.

Por lo tanto para obtener el máximo beneficio se han de comprar 6 ordenadores de tipo 1 y 12 ordenadores de tipo 2.

.- (Cantabria, Septiembre de 1998) Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^3 & si \quad x \le -1 \\ -3x & si \quad -1 < x \le 0 \\ 3x & si \quad 0 < x < 1 \\ x^3 & si \quad 1 \le x \end{cases}$

1. Estudiar su dominio de definición, continuidad, derivabilidad e intervalos de crecimiento y decrecimiento.

2. Hallar el área encerrada por las rectas x = 1, x = -1, la gráfica de la función f(x), y por la gráfica de la función g(x), definida a continuación $g(x) = \begin{cases} -x^3 & si \quad x \le 0 \\ x^3 & si \quad 0 < x \end{cases}$.

.- (Cantabria, Septiembre de 1998) Disponemos de 10^8 pesetas para vallar una parcela rectangular. La situación de la parcela es tal que está situada entre dos carreteras paralelas y por los otros lados limita con sendos propietarios particulares. Las condiciones de la urbanización nos obligan de tal modo que la construcción de las vallas que limitan con las carreteras cuesta, por metro lineal, cinco veces más que las que limitan con los otros propietarios.

El coste por metro lineal de las vallas que limitan con los otros propietarios es 10^4 pesetas.
- Determinar las dimensiones de la parcela que tenga área máxima y que podamos vallar con el dinero que disponemos.

.- (Cantabria, Junio de 1999) Sean las funciones: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ y $g(x) = -3x^2 + 6x$.
Determinar:

1.- Los puntos de corte con los ejes de cada función.
2.- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de cada función.
3.- Valor, o valores, de x en los que cada función tiene un extremo relativo.
4.- El área encerrada por ambas funciones.

.- (Cantabria, Junio de 1999) Una ventana tiene la forma de semicírculo montada sobre un rectángulo. El rectángulo es de cristal transparente, mientras que el semicírculo es de cristal de color que transmite la mitad de luz por unidad de área transparente. El perímetro total (exterior) de la ventana es fijo. Hallar las proporciones de la ventana que proporcionen la mayor cantidad de luz.

.- (Cantabria. Septiembre de 1999) Dada una función f(x), definida en todo R, se sabe:

a) Su gráfica es simétrica respecto al eje OY,
b) para valores de $x \geq 0$ está definida del siguiente modo:

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \in [0,5) \\ 2x-5 & si \quad x \in [5,10) \\ -3x & si \quad x \in [10,+\infty) \end{cases}$$

Se pide:

1.- Estudiar su continuidad en todo R.
2.- Estudiar su derivabilidad en todo R.
3.- Área encerrada por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas x = -10 y x = 10
4.- ¿Tendría sentido el ejercicio si en vez de decirnos que la función está definida en todo R y que su gráfica es simétrica respecto al eje OY nos dijesen que la función está definida para R^+U0 y que su gráfica es simétrica respecto al eje OX?. Comente brevemente la respuesta.

.- (Cantabria. Septiembre de 1999) Una compañía puede producir un día *x* cientos de neumáticos de calidad A. Además por cada *x* cientos de neumáticos de calidad A es capaz de producir $\frac{50-12x}{6-x}$ cientos de calidad B. El beneficio que dejan los neumáticos de calidad B es la mitad del que dejan los neumáticos de calidad A. Hallar el número de neumáticos de cada tipo que resulta más rentable producir cada día.

.- (Cantabria. Junio de 2000) El dueño de un manantial de agua mineral llega a la siguiente conclusión: si el precio a que vende la botella es x pta., sus beneficios en pesetas al día serán de: -1000 x^2 + 10000 x - 21000. Si los beneficios son positivos hablamos de ganancias y si son negativos de pérdidas.

a) ¿A partir de qué precio tiene ganancias?
b) ¿Puede ese precio crecer indefinidamente y seguir teniendo ganancias?
c) ¿Cuál es el precio que le permite obtener mayores ganancias?.
d) Para vender más está dispuesto a tener pérdidas de hasta 12000 pesetas al día para lo cual baja el precio, ¿qué precio debe poner?
e) Determinar los precios, que sean un número entero, con los cuáles obtiene las máximas ganancias.

.- (Cantabria. Junio de 2000) Sea la función: $f(x) = \dfrac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2}$. Determinar:

1.- Su dominio de definición.
2.- Los puntos, o el punto, en que la función se anula.
3.- Los intervalos en los que la función es creciente o decreciente, así como aquellos puntos en los que alcanza un máximo o un mínimo.
4.- Ecuaciones de las asíntotas, si es que las hay.

.- (Cantabria. Septiembre de 2000) Se define la función $|f(x)|$ del modo siguiente:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & si \quad f(x) > 0 \\ 0 & si \quad f(x) = 0 \\ -f(x) & si \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

Si tenemos la función $y = |x^2 - 4|$, definida en el intervalo [-5, 5], se pide:

1.- Su dominio de definición.
2.- Los puntos, o el punto, en que la función se anula.
3.- Los intervalos en que la función es creciente o decreciente, así como aquellos puntos en los que alcanza un máximo o un mínimo.
4.- Área encerrada por la función, el eje OX, y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

.- (Cantabria. Septiembre de 2000) Un campo de atletismo se construye en forma de rectángulo de lado x, con semicírculo de radio r en ambos extremos. El campo está rodeado por una pista de 400 m. ¿Qué valores de x y r darán por resultado el máximo área posible del campo?.

.- (Cantabria. Junio de 2001) Se considera la función: $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.
Determinar:

1.- Su dominio de definición.
2.- Los puntos, o el punto, en los que la función se anula.
3.- Los intervalos en que la función es creciente o decreciente, así como aquellos puntos en los que alcanza un máximo o un mínimo.
4.- Ecuaciones de las asíntotas, si es que existen.

.- (Cantabria. Junio de 2001) Determinar dos números cuya suma sea 24 y tales que el producto del uno por el cubo del otro sea máximo.

.- (Cantabria. Septiembre de 2001) Sea f(x) definida del modo siguiente:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{7x-x^2}{6} & si \quad x\le 1 \\ 1 & si \quad 1<x<6 \\ \dfrac{7x-x^2}{6} & si \quad 6\le x \end{cases}$$

Se pide:
1. Estudiar su continuidad.
2. Estudiar su derivabilidad.
3. Hallar el área finita encerrada por la función y el eje Ox.

.- (Cantabria. Septiembre de 2001) Se pretende diseñar un depósito abierto, para recoger agua de lluvia, de 1000 litros de capacidad, que tenga la forma de un cilindro circular, para lo que disponemos de la cantidad de chapa necesaria.
1. ¿Qué dimensiones utilizarán la menor cantidad de materia prima?
2. Si el metro cuadrado de chapa nos cuesta 1000 pesetas, ¿qué coste tiene?

.- (Cantabria, junio de 2002) Dada la función $y = x^3 - x^2 - 2x$, se pide hallar:
1. Los puntos en los que la función se anula.
2. Los intervalos en que la función es creciente o decreciente.
3. Los valores de x para los cuales la función alcanza un valor máximo o mínimo, justificando la respuesta.
4. El área finita encerrada por la gráfica de la función y por las rectas: y = 0, x = 0 y x = 2.

.- (Cantabria, junio de 2002) De entre todos los triángulos rectángulos inscritos en una semicircunferencia (hipotenusa = diámetro) de radio 10 cm, se pide hallar el que tiene área máxima.

.- (Cantabria, Septiembre de 2002) Sea la función:

$$y(x)=\frac{x^2+x}{x^2+1}$$

Se pide hallar:
1. Su dominio de definición.
2. El punto, o los puntos, en los que la función se anula.
3. Los intervalos en los que la función es creciente o decreciente.
4. Los puntos en los que la función alcanza un máximo o un mínimo, justificando la respuesta.
5. Ecuaciones de las asíntotas, si es que las hay.

.- (Cantabria, Septiembre de 2002) En una ventana rectangular se ha sustituido el lado superior por un semicírculo. Su perímetro total es 4 m. Si la cantidad de luz que penetra ha de ser máxima.
Se pide:
- Las dimensiones de la ventana.

.- (Cantabria, Junio 2003) Sea la función, f(x), definida del modo siguiente

$$f(x)=\begin{cases} 3+2x & si \quad x<0 \\ ax^2+bx+c & si \quad 0\le x \end{cases}$$

Que cumple las siguientes condiciones:

- Es continua en x = 0
- Es derivable en x = 0
- El área encerrada por la gráfica de la función y las rectas: x = 0, x = 3 e y = 0 es igual a 9 unidades de superficie.

Se pide:
a) Determinar la función.
b) Determinar su máximo o mínimo si es que los tiene.

SOLUCIÓN:
a) Para determinar la función deben hallarse los valores de los coeficientes *a*, *b* y *c*
De la condición ser continua en x = 0, se obtiene:
$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0}(3+2x)=3$; $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(ax^2+bx+c\right)=c$, de donde: c = 3.
Por ser derivable en x = 0, tendremos:
$f'(0^-)=D(3+2x)_{x=0}=2$; $f'(0^+)=D(ax^2+bx+c)_{x=0}=b$, luego b = 2.
El área encerrada por la gráfica de la función y las rectas: x = 0, x = 3 e y = 0 vendrá dada por:

$$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3\left(ax^2+2x+3\right)dx=\left[a\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_0^3=9a+18$$

De donde: $9a+18=9$; $a=-1$.
Por lo tanto: $f(x)=\begin{cases} 3+2x & si \quad x<0 \\ -x^2+2x+3 & si \quad 0\le x \end{cases}$

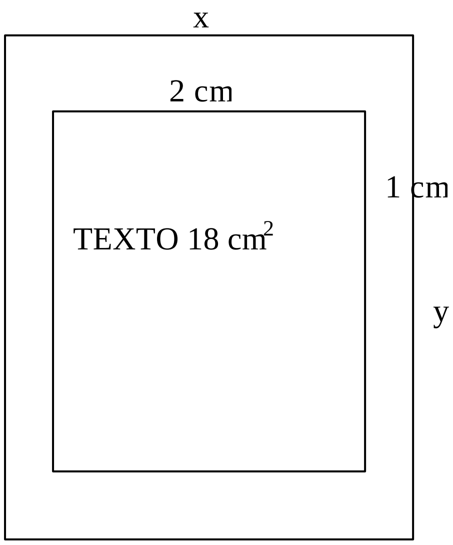
b) la función derivada de f viene dada por: $f'(x)=\begin{cases} 2 & si \quad x<0 \\ -2x+2 & si \quad 0\le x \end{cases}$ que se anula en x = 1. Como $f''(1)=-2$, tendremos en x = 1 un máximo.

.- (Cantabria, Junio 2003) A un intermediario un producto le cuesta, la unidad, 300 euros. Conoce que, al precio de 420 euros la unidad, vende 50 unidades al mes y que, por cada 3 euros de descuento en el precio, puede vender 5 unidades más al mes. Hállese a qué precio debe vender el producto para obtener el máximo beneficio posible.

.- (Cantabria, Septiembre 2003) Sea la función $f(x)=x^3-6x^2+9x$.
Se pide hallar:
1. Su dominio de definición.
2. El punto, o los puntos, en que la función se anula.
3. Los intervalos en que la función es creciente o decreciente.
4. Los puntos en los que la función alcanza un máximo o un mínimo, justificando la respuesta.
5. Área encerrada por la gráfica de la función f(x) y las rectas: x = 0, x = 3 e y = 0.

.- (Cantabria, Septiembre 2003) Una hoja de papel debe tener 18 cm^2 de texto impreso, márgenes superior e inferior de 2 cm de altura y márgenes laterales de 1 cm de anchura.
- Obtener razonadamente las dimensiones que minimizan la superficie del papel.

SOLUCIÓN:



El área de texto viene dada por
(x - 2)(y - 4) = 18
De donde:

$$y = \frac{4x+10}{x-2}$$

El área de la hoja de papel viene dada por:

$$A(x,y) = x \cdot y$$

De donde sustituyendo el valor de y en función de x, tendremos:

$$A(x) = \frac{4x^2+10}{x-2}$$

Cuya derivada es: $A'(x) = \dfrac{4x^2-16x-20}{(x-2)^2}$

Hallamos los puntos en que se anula: $A'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 16x - 20 = 0$, luego se anula para x = -1 y para x = 5.

Se halla la derivada segunda: $A''(x) = \dfrac{8(x-2)^2 - 8(x+1)(x-5)}{(x-2)^3}$.

Como A”(5) >0 tenemos un mínimo para x = 5.
Por lo tanto el área de la hoja de papel es mínima para x = 5 cm y para y = 10 cm.

P.A.U. en otras Comunidades Autónomas

1.- Dada la curva $y = x^3$, se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a dicha curva en el punto (1, 1).
b) La recta tangente anterior corta de nuevo a la curva en otro punto. Calcular sus coordenadas.
c) Hallar el área del recinto plano acotado limitado por la curva $y = x^3$.

2.- La cotización en pesetas de cierta moneda en los últimos 5 años y medio se ajusta bastante bien a la siguiente función (C(t)indica la cotización en el tiempo t medido en años):

$C(t) = \left(-t^2 + 1\right)\left(t - 9\right) - 16t + 59\,;\ \ 0 < t < 5{,}5$

(a) Encuentra el intervalo o intervalos de tiempo en que la cotización creció, y aquél o aquellos en que decreció.
(b) ¿En qué momentos hubo una cotización más baja y más alta? ¿cuáles fueron esas cotizaciones?
(c) ¿Tiene la función C(t) algún punto de inflexión? Esboza un dibujo de dicha función.

3.- Dada la función $f(x) = (x + a)e^{\frac{x}{2}+1}$, donde a es una constante,
(a) Encuentra una primitiva de f.

(b) Calcula *a* sabiendo que $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 8$. Justificar que, para ese valor de *a*, $2xe^{\left(\frac{x}{2}+1\right)}$ no es primitiva de f.

4.- Descomponga el número 14 en suma de tres números reales positivos tales que uno de ellos sea el doble de otro y la suma de los cuadrados de los tres sea la menor posible.

5.- Se considera la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$
Se pide:
a) Dominio de la función, puntos de corte con los ejes y simetrías.
b) Asíntotas y regiones de existencia de la gráfica.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos, si los hay.
d) Representación gráfica aproximada.

6.- De la función $f(x) = x^2 + ax + b$ (se sabe que tiene un mínimo en $x = 2$ y que su gráfica pasa por el punto (2,2). ¿Cuánto vale la función en $x = -1$?

7.- Como resultado del test efectuado con un nuevo modelo de automóvil a fin de determinar su consumo de gasolina, se ha observado que, para velocidades comprendidas entre 25 y 175 km/h, el consumo C(x) de gasolina, expresado en litros consumidos en 100 km, realizados a la velocidad constante de x km/h, se puede aproximar por la función $C(x) = 7{,}5 - 0{,}05x + 0{,}00025x^2$.
a) Determine el consumo a las velocidades de 50 km/h y de 150 km/h.
b) ¿A qué velocidad se obtiene el mínimo consumo? ¿Cuál es dicho consumo mínimo?

c) Haga un estudio del crecimiento y decrecimiento de la función C(x) en el intervalo [25,175]. Determine las velocidades que corresponden a consumo máximo, así como dicho consumo.

8.- Queremos fabricar el marco de un cuadro con un listón de madera de 300 cm de largo.
a) Determine la relación que hay entre la base y la altura del marco.
b) Determine la función que expresa la superficie del cuadro en términos de la base del marco.
c) Haga un gráfico de dicha función poniendo de manifiesto sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos.
d) Halle las dimensiones del marco para que la superficie del cuadro sea máxima. Halle el valor de la superficie.

9.- Determine si las gráficas de la función $f(x) = x^2 - 2x + 2$ y de la recta $y = 2x - 2$ son tangentes en algún punto. En ese caso, determine dicho punto. ¿Existe algún otro punto de intersección entre la recta y la gráfica de la función?

10.- Considere la parábola $y = x^2$ y la recta $y = mx$, con m real positivo.
a) Calcule el área de la región cerrada delimitada por las gráficas de la parábola y de la recta en función de m.
b) ¿Qué valor tiene m si el área de la región del apartado a) es 288?

11.- Considere la curva de ecuación $f(x) = x^3 - x$.
a) Calcule los puntos en donde la gráfica de f(x) corta el eje de abscisas y explique razonadamente dónde es positiva y dónde es negativa f(x).
b) Halle el área del recinto limitado por la parte positiva de la gráfica de f(x) y el semieje negativo de abscisas.

12.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + kx & si \quad 0 \le x \le 2 \\ x^2 - 6x + 10 & si \quad x > 2 \end{cases}$
a) Calcula k para que f sea continua en x = 2.
b) Representa gráficamente f para el valor k hallado en el apartado anterior.
c) Calcula el área del recinto limitado por el eje OX, la gráfica de f y la recta x = 4.

13.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5x - 4 & si \quad x \le 3 \\ x + k & si \quad x > 3 \end{cases}$
a) Calcula k para que f sea continua en x = 3.
b) Representa gráficamente f para el valor k hallado en el apartado anterior.
c) Calcula el área del recinto limitado por el eje OX, la gráfica de f y las rectas x = 1 y x = 2.

14.- Debo diseñar un escenario rectangular de 100 m^2 y para optimizar la visibilidad de los espectadores deseo que el perímetro sea mínimo. Obtener razonadamente el largo y ancho del escenario.

15.- Dada la función $f(x) = 1 + \dfrac{4}{x-4}$

a) Determinar los cortes con los ejes, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, las asíntotas.
b) ¿Existe algún máximo?. ¿Existe algún mínimo?. Justifíquese la respuesta.
c) Representar su gráfica.

16.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & si \quad x \leq 2 \\ \dfrac{10}{x} & si \quad x > 2 \end{cases}$. Calcular el área limitada por su gráfica, el eje OX y las rectas x = 1 y x = 3.

17.- Se quiere construir una pista de entrenamiento que consta de un rectángulo y dos semicírculos adosados a los lados opuestos del rectángulo. Si se desea que el perímetro de dicha pista sea de 200 metros, hallar las dimensiones que hacen máxima el área de la región rectangular.

18.- La velocidad (en m/seg.) que alcanza cierto atleta en una carrera de 200 metros, viene dada en función del espacio recorrido, x, por la siguiente expresión:
$f(x) = -0{,}00055x(x - 300)$
Deducir de forma razonada
a) ¿Qué distancia ha recorrido el atleta cuando alcanza su velocidad máxima?. ¿Cuál es la velocidad?.
b) ¿Entre qué distancias su velocidad va aumentando?. ¿Y disminuyendo?.
c) ¿A qué velocidad llega a la meta?

19.- La función $f(t) = 2{,}1t^2 + 0{,}8t - 1$ para $0 \leq t \leq 9$, donde el tiempo t viene expresado en años, proporciona los beneficios de una empresa en miles de euros entre los años 1991 (t = 0) y 2000 (t = 9).
a) Calcular de forma razonada la tasa de variación media del beneficio de esta empresa en este periodo de tiempo.
b) Obtener de forma razonada la tasa de variación media de los beneficios de los dos últimos años.
c) ¿Qué podemos concluir acerca de la variación del beneficio en los dos periodos anteriores?

20.- Dada la parábola $f(x) = x^2 + bx + c$, calcular b y c si pasa por el punto (0, 2) y tiene un mínimo en x = 1. Calcular el área limitada por $f(x)$, el eje X y las rectas $x = 1$ e $y = -x+4$.